

LA DIMENSIONE DI HAUSDORFF DEI FRATTALI AUTOSIMILI

SAMUELE GATTI

INDICE

1. Misure di Hausdorff e dimensione di Hausdorff	1
2. Dimensione dei frattali, un'introduzione intuitiva	2
3. Dimensione dei frattali autosimili	4
Riferimenti bibliografici	8

1. MISURE DI HAUSDORFF E DIMENSIONE DI HAUSDORFF

Si richiamano alcuni concetti dal corso di Analisi 4. Ci si limiterà al caso di sottoinsiemi di \mathbb{R}^n (si generalizza al caso di uno spazio metrico secondo numerabile).

Definizione 1.1. Dati $\alpha \geq 0$, $\delta > 0$, si definisce, per $F \subset \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} (\text{diam } U_i)^\alpha : F \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} U_i, \text{diam } U_i \leq \delta, \forall i \right\}.$$

Definizione 1.2. La collezione $\{U_i\} \subset \mathbb{R}^n$ tale che $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} U_i$, $\text{diam } U_i \leq \delta \forall i$ è detta δ -ricoprimento di F .

Osservazione 1.3. Al decrescere di δ si prende l'inf di una collezione più piccola di ricoprimenti, perciò $\mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}(F)$ è crescente in δ . Si può perciò dare la

Definizione 1.4. La misura di Hausdorff α -dimensionale di $F \subset \mathbb{R}^n$ è definita da

$$\mathcal{H}_\alpha(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}(F). \tag{1}$$

Osservazione 1.5. Si prova che \mathcal{H}_α definita da (1) è effettivamente una misura, restringendola a un'opportuna σ -algebra. Si veda [2, §11.2].

Osservazione 1.6. Si può dimostrare che, come ci si può aspettare,

$$\mathcal{H}_n = \gamma_n^{-1} m_n,$$

dove m_n è la misura di Lebesgue in \mathbb{R}^n e

$$\gamma_n = \frac{m_n(B_1)}{2^n} = \frac{\pi^{n/2}}{2^n \Gamma(\frac{n}{2} + 1)}.$$

Perciò, in \mathbb{R} , \mathcal{H}_1 misura una lunghezza; in \mathbb{R}^2 , \mathcal{H}_2 misura un'area; in \mathbb{R}^n , \mathcal{H}_m misura il *volume* di una m -varietà di \mathbb{R}^n .

Per proseguire, serve una proprietà di scalamento.

Proposizione 1.7. Sia S una similitudine con fattore di scala $\lambda > 0$, cioè

$$S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad S(x) = \lambda Mx + b,$$

con M trasformazione ortogonale e $b \in \mathbb{R}^n$. Se $F \subset \mathbb{R}^n$, allora

$$\mathcal{H}_\alpha(S(F)) = \lambda^\alpha \mathcal{H}_\alpha(F).$$

Dimostrazione. Sia $\{U_i\}$ un δ -ricoprimento di F ; allora $\{S(U_i)\}$ è un $\lambda\delta$ -ricoprimento di $S(F)$, perciò

$$\sum (\text{diam}(S(U_i)))^\alpha = \sum \lambda^\alpha (\text{diam } U_i)^\alpha.$$

Prendendo l'inf si ha

$$\mathcal{H}_\alpha^{(\lambda\delta)}(S(F)) \leq \lambda^\alpha \mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}(F)$$

e con $\delta \rightarrow 0^+$, $\mathcal{H}_\alpha(S(F)) \leq \lambda^\alpha \mathcal{H}_\alpha(F)$.

Sostituendo S con S^{-1} , λ con $1/\lambda$ e F con $S(F)$ si ha l'altra disuguaglianza. \square

Osservazione 1.8. La proposizione precedente è un caso particolare della Prop. 11.21 di [2]: *Sia $k \leq n$, $F \subset \mathbb{R}^n$, $T: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineare. Allora, posto $J(T) = \sqrt{\det(T^*T)}$, si ha*

$$\mathcal{H}_k(T(F)) = J(T) \mathcal{H}_k(F).$$

Nel caso della Prop. 1.7 si ha $J(T) = \lambda$.

Si può a questo punto introdurre la dimensione di Hausdorff.

Proposizione 1.9. *Sia $F \subset \mathbb{R}^n$; valgono*

- (i) *Se $\mathcal{H}_\alpha(F) < +\infty$, allora $\forall \beta > \alpha$, $\mathcal{H}_\beta(F) = 0$;*
- (ii) *se $\mathcal{H}_\alpha(F) > 0$, allora $\forall \gamma < \alpha$, $\mathcal{H}_\gamma(F) = +\infty$;*
- (iii) *è ben definita la quantità $\sup\{\gamma: \mathcal{H}_\gamma(F) = +\infty\} = \inf\{\beta \geq 0: \mathcal{H}_\beta(F) = 0\} =: \alpha$, detta dimensione di Hausdorff di F ; in seguito si usa la notazione $\alpha = \dim_H F$.*

Osservazione 1.10. Se $\alpha = \dim_H F$, può avvenire che $\mathcal{H}_\alpha(F) = +\infty$ o $\mathcal{H}_\alpha(F) = 0$; per esempio, $\mathcal{H}_1(\mathbb{R}) = +\infty$, ed è chiaro che $\dim_H \mathbb{R} = 1$.

Dimostrazione.

- (i) Sia $\{U_i\}$ un δ -ricoprimento di F ; vale

$$\sum (\text{diam } U_i)^\beta = \sum (\text{diam } U_i)^{\beta-\alpha} (\text{diam } U_i)^\alpha \leq \delta^{\beta-\alpha} \sum (\text{diam } U_i)^\alpha;$$

prendendo l'inf,

$$\mathcal{H}_\beta^{(\delta)}(F) \leq \delta^{\beta-\alpha} \mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}(F)$$

e, facendo il limite per $\delta \rightarrow 0^+$, poiché $\mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}$ sono crescenti e $\mathcal{H}_\alpha(F) < +\infty$,

$$0 \leq \mathcal{H}_\beta(F) \leq \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \delta^{\beta-\alpha} \mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}(F) = 0.$$

- (ii) Per assurdo, se $\mathcal{H}_\gamma(F) < +\infty$ per $\gamma < \alpha$, allora (i) impone $\mathcal{H}_\alpha(F) = 0$. \square

2. DIMENSIONE DEI FRATTALI, UN'INTRODUZIONE INTUITIVA

Seguendo l'introduzione di [1], si definisce senza troppo rigore un frattale come un insieme F per il quale vale qualcuna delle seguenti proprietà:

- (i) F ha una struttura fine;
- (ii) F è troppo irregolare per essere descritto in maniera geometrica tradizionale;
- (iii) F è autosimile (o statisticamente autosimile);
- (iv) la dimensione frattale (per esempio quella di Hausdorff) di F è strettamente maggiore di quella topologica;
- (v) F è definito ricorsivamente.

Tali proprietà si riscontrano nei frattali oggetto degli esempi che seguono.

Esempio 2.1 (Insieme di Cantor). Sia E_0 l'intervallo $[0, 1]$; si definiscono gli

$$E_k = \bigcup_{j=0}^{2^k-1} I_{k,j}, \quad m(I_{k,j}) = 3^{-k},$$

ottenuti ricorsivamente nel seguente modo:

$$E_{k+1} = \bigcup_{j=0}^{2^{k+1}-1} (I_{k,j} \setminus J_{k,j}) := \bigcup_{j=0}^{2^{k+1}-1} I_{k+1,j}, \quad m(J_{k,j}) = 3^{-(k+1)},$$

dove i $J_{k,j}$ sono i *terzi medi* degli $I_{k,j}$.

Gli E_k sono inscatolati ($E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \dots$), compatti, perciò si può definire l'insieme di Cantor F :

$$\bigcap_{k=1}^{+\infty} E_k =: F.$$

Come è noto, l'insieme di Cantor è compatto, mai denso, totalmente disconnesso, continuo, Lebesgue-misurabile con $m(F) = 0$.

Si considerino le similitudini

$$S_1(x) = \frac{1}{3}x, \quad S_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3};$$

è evidente che si abbia

$$F = S_1(F) \cup S_2(F),$$

con l'unione disgiunta; perciò, se $\alpha = \dim_H F$, usando la Prop. 1.7,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\alpha(F) &= \mathcal{H}_\alpha(S_1(F)) + \mathcal{H}_\alpha(S_2(F)) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^\alpha \mathcal{H}_\alpha(F) + \left(\frac{1}{3}\right)^\alpha \mathcal{H}_\alpha(F); \end{aligned}$$

se poi $0 < \mathcal{H}_\alpha(F) < +\infty$, dividendo, si ha

$$1 = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^\alpha \iff \alpha = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Esempio 2.2 (Cantor a due rapporti). Siano r_1 e $r_2 \in \mathbb{R}^+$ tali che $r_1 + r_2 < 1$; la costruzione dell'esempio precedente si generalizza lasciando, ad ogni passo, due intervalli di lunghezza diversa: uno di rapporto r_1 , l'altro di rapporto r_2 . In questo caso, è più conveniente definire l'insieme per mezzo di similitudini: l'insieme di Cantor a due rapporti F è quindi quello per cui

$$F = S_1(F) \cup S_2(F)$$

con

$$S_1(x) = r_1x, \quad S_2(x) = r_2x + 1 - r_2.$$

Procedendo come sopra, risulta, se $\alpha = \dim_H F$,

$$1 = r_1^\alpha + r_2^\alpha.$$

Esempio 2.3 (Triangolo di Sierpinski). Partendo da un triangolo equilatero di lato unitario, anche in questo caso è comodo procedere definendo il triangolo di Sierpinski per mezzo di similitudini:

$$F = \bigcup_{i=1}^3 S_i(F), \quad S_i(x) = \frac{1}{2}x + b_i,$$

con

$$b_1 = (0, 0), \quad b_2 = (1/2, 0), \quad b_3 = (1/4, 1/2).$$

Anche in questo caso risulta quindi, se $\alpha = \dim_H F$,

$$1 = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha \iff \alpha = \frac{\log 3}{\log 2}.$$

Esempio 2.4 (Curva di von Koch). Partendo dall'intervallo $[0, 1]$, si definisce la curva di von Koch per mezzo di quattro similitudini:

$$F = \bigcup_{i=1}^4 S_i(F), \quad S_i(x) = \frac{1}{3}M_i x + b_j,$$

dove

$$M_1 = M_4 = I, \quad M_2 = R_{\pi/3}, \quad M_3 = R_{-\pi/3}$$

$$b_1 = (0, 0), \quad b_2 = (1/3, 0), \quad b_3 = (1/2, \sqrt{3}/6), \quad b_4 = (2/3, 0).$$

Se dunque $\alpha = \dim_H F$, si ha

$$1 = \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{3}\right)^\alpha \iff \alpha = \frac{\log 4}{\log 3}.$$

Esempio 2.5. Nei precedenti esempi si possono considerare similitudini di rapporto diverso, ottenendo oggetti analoghi all'insieme di Cantor a due rapporti.

Si possono anche costruire frattali con più di due rapporti. Un esempio è l'insieme di Cantor uniforme, in cui, cioè, si prendono m intervalli equispaziati di ampiezza r (opportuna); la dimensione, procedendo come già fatto, è $\alpha = -\frac{\log m}{\log r}$.

3. DIMENSIONE DEI FRATTALI AUTOSIMILI

Ci si propone di giustificare e formalizzare quanto fatto negli esempi del paragrafo precedente.

Definizione 3.1. Una similitudine contrattiva è una mappa $S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che esista un $0 < c < 1$ per cui $|S(x) - S(y)| = c|x - y|$.

Definizione 3.2. Un sistema di funzioni iterate (IFS) è una famiglia finita di similitudini contrattive, cioè un $\{S_1, \dots, S_m\}$, con S_i similitudine contrattiva.¹

Definizione 3.3. $F \subset \mathbb{R}^n$ è un attrattore per $\{S_1, \dots, S_m\}$ IFS se F è compatto, non vuoto e tale che

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F). \quad (2)$$

Osservazione 3.4. Si può dimostrare (Teorema 9.1 di [1]) che per ogni IFS esiste un unico attrattore.

Teorema 3.5. Sia $\{S_1, \dots, S_m\}$ IFS e sia c_i la costante relativa a S_i ; esista un V aperto tale che

$$V \supset \bigcup_{i=1}^m S_i(V), \quad (3)$$

con l'unione disgiunta (condizione dell'aperto); sia F l'attrattore dell'IFS. Allora $\alpha = \dim_H F$ tale che

$$\sum_{i=1}^m c_i^\alpha = 1, \quad (4)$$

per cui si ha anche $0 < \mathcal{H}_\alpha(F) < +\infty$.

¹In generale si può chiedere che ogni S_i sia una contrazione.

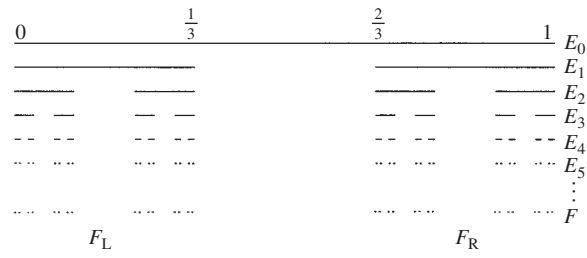


FIGURA 1. Insieme di Cantor, $\alpha = \frac{\log 2}{\log 3}$.

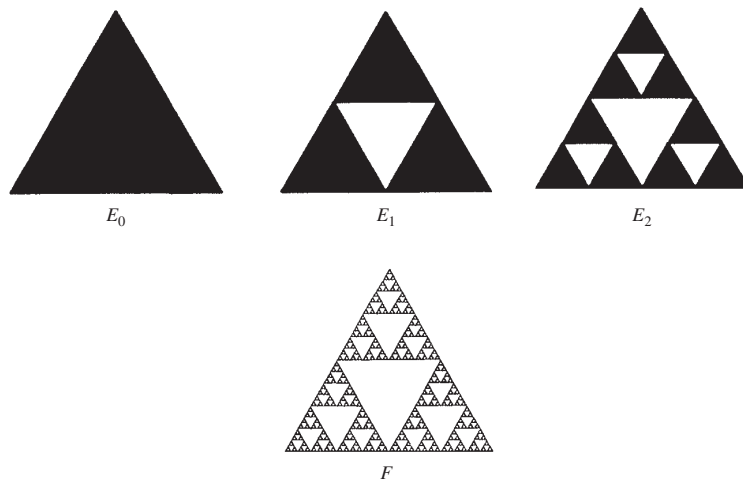


FIGURA 2. Triangolo di Sierpinski, $\alpha = \frac{\log 3}{\log 2}$.

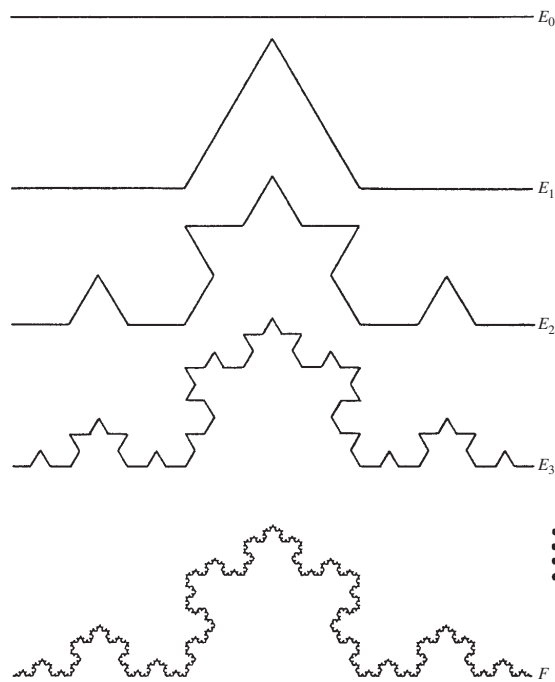


FIGURA 3. Curva di von Koch, $\alpha = \frac{\log 4}{\log 3}$.

Osservazione 3.6. Gli esempi del paragrafo precedente hanno individuato, in qualche caso particolare, il valore di α ; non resta che provare che $0 < \mathcal{H}_\alpha(F) < +\infty$ per avere $\alpha = \dim_H F$.

Dimostrazione.

Prima parte: $\mathcal{H}_\alpha(F) < +\infty$.

Sia $\mathcal{I}_k = \{(i_1, \dots, i_k) : 1 \leq i_j \leq m\}$ e sia, dati $A \in \mathbb{R}^n$ e $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{I}_k$,

$$A_{i_1, \dots, i_k} := S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(A).$$

Da (2), iterando, segue che

$$F = \bigcup_{\mathcal{I}_k} F_{i_1, \dots, i_k}.$$

Questo permette di fornire una buona stima superiore per la misura di Hausdorff. Dal momento che F_{i_1, \dots, i_k} è composizione di similitudini di rapporto c_{i_j} , vale infatti

$$\begin{aligned} \sum_{\mathcal{I}_k} (\text{diam } F_{i_1, \dots, i_k})^\alpha &= \sum_{\mathcal{I}_k} (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^\alpha (\text{diam } F)^\alpha \\ &= \left(\sum_{i_1} c_{i_1}^\alpha \right) \cdots \left(\sum_{i_k} c_{i_k}^\alpha \right) (\text{diam } F)^\alpha \\ &= (\text{diam } F)^\alpha, \end{aligned} \quad (5)$$

dove la seconda uguaglianza vale spezzando la somma sulle componenti degli elementi di \mathcal{I}_k e l'ultima si ha per la (4).

Fissato $\delta > 0$, si sceglie k tale che

$$\text{diam } F_{i_1, \dots, i_k} \leq \left(\max_i c_i \right)^k \text{diam } F \leq \delta,$$

cioè tale che la famiglia $\{F_{i_1, \dots, i_k}\}$ costituisca un δ -ricoprimento di F (si può fare perché ogni $c_i < 1$); perciò, per la (5), $\mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}(F) \leq (\text{diam } F)^\alpha$ e quindi $\mathcal{H}_\alpha(F) \leq (\text{diam } F)^\alpha < +\infty$.

Seconda parte: $\mathcal{H}_\alpha(F) > 0$.

Si ricorre al *principio della distribuzione di massa*:

Lemma 3.7. Sia μ una misura finita su F e, per un certo α , esistano $c > 0$ e $\varepsilon > 0$ tali che, $\forall U$ con $\text{diam } U < \varepsilon$,

$$\mu(U) \leq c(\text{diam } U)^\alpha. \quad (6)$$

Allora $\mathcal{H}_\alpha(F) \geq c^{-1}\mu(F)$.

Dimostrazione. Sia $\{U_i\}$ una ε -copertura di F ; vale

$$0 < \mu(F) \leq \mu\left(\bigcup U_i\right) \leq \sum \mu(U_i) \leq c \sum (\text{diam } U_i)^\alpha,$$

dove l'ultima disuguaglianza si ha per la (6). Prendendo gli inf sulle δ -coperture, si ha, se δ è sufficientemente piccolo,

$$\mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}(F) \geq \frac{\mu(F)}{c},$$

perciò, per $\delta \rightarrow 0^+$, si ha la stessa disuguaglianza anche per \mathcal{H}_α . \square

Basta quindi trovare una μ misura finita su F che soddisfi la (6).

Sia allora $\mathcal{I} = \{(i_1, i_2, \dots) : 1 \leq i_j \leq m\}$ e sia

$$I_{i_1, \dots, i_k} = \{(i_1, \dots, i_k, q_{k+1}, \dots) : 1 \leq q_j \leq m\} \subset \mathcal{I}$$

il cilindro delle successioni con i primi k termini fissati.

Definendo

$$\mu(I_{i_1, \dots, i_k}) := (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^\alpha,$$

si ha che questa si estende a una misura finita su \mathcal{I} ; dalla definizione, l'unica proprietà non immediata da verificare è l'additività, che segue dall'osservare che

$$\bigcup_{i=1}^m I_{i_1, \dots, i_k, i} = I_{i_1, \dots, i_k},$$

$$\sum_{i=1}^m (c_{i_1} \cdots c_{i_k} c_i)^\alpha = (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^\alpha \sum_{i=1}^m c_i^\alpha = (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^\alpha,$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla (4), e quindi

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^m I_{i_1, \dots, i_k, i}\right) = \mu(I_{i_1, \dots, i_k}) = (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^\alpha = \sum_{i=1}^m (c_{i_1} \cdots c_{i_k} c_i)^\alpha = \sum_{i=1}^m \mu(I_{i_1, \dots, i_k, i});$$

da qui si generalizza a unioni disgiunte qualsiasi. Segue anche (per la (4)) che $\mu(\mathcal{I}) = 1$.

Osservando che²

$$F \ni x_{i_1, i_2, \dots} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} F_{i_1, \dots, i_k},$$

si può trasferire μ a una $\tilde{\mu}$ su F , ponendo

$$\tilde{\mu}(A) := \mu(\{(i_1, i_2, \dots) : x_{i_1, i_2, \dots} \in A\}).$$

Vale anche $\tilde{\mu}(F) = \mu(\mathcal{I}) = 1$.

Resta da mostrare che $\tilde{\mu}$ soddisfi la (6). Dalla condizione dell'aperto (3), $\bar{V} \supset S(\bar{V}) := \bigcup_{i=1}^m S_i(\bar{V})$ e, dal teorema di esistenza e unicità dell'attrattore ([1], Teorema 9.1), la successione $S^k(\bar{V})$ converge a F ; dunque

$$\bar{V} \supset F, \quad \bar{V}_{i_1, \dots, i_k} \supset F_{i_1, \dots, i_k}, \quad \forall (i_1, \dots, i_k).$$

Nel seguito si indica con B_r una qualsiasi bolla di raggio r .

Sia $r > 1$; si vuole stimare $\tilde{\mu}(B_r)$ usando insiemi V_{i_1, \dots, i_k} dal diametro opportuno e tali che $F \cap B_r$ intersechi $\bar{V}_{i_1, \dots, i_k}$.

Si taglia la successione di $(i_1, i_2, \dots) \in \mathcal{I}$ dopo i_k , con k tale che

$$\left(\min_{1 \leq i \leq m} c_i\right) r \leq c_{i_1} \cdots c_{i_k} \leq r; \quad (7)$$

sia \mathcal{Q} l'insieme delle successioni finite ottenute.

Si ha che $\forall (i_1, i_2, \dots)$ esiste un k tale che $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}$. I V_1, \dots, V_m sono disgiunti per la (3) e, iterando, segue che è disgiunta anche la collezione

$$\{V_{i_1, \dots, i_k} : (i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}\},$$

analogamente vale anche

$$F \subset \bigcup_{\mathcal{Q}} F_{i_1, \dots, i_k} \subset \bigcup_{\mathcal{Q}} \bar{V}_{i_1, \dots, i_k}.$$

Prendendo a_1 e $a_2 \in \mathbb{R}^+$ tali che $B_{a_1} \subset V \subset B_{a_2}$, $\forall (i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}$ si ha $B_{c_{i_1} \cdots c_{i_k} a_1} \subset V_{i_1, \dots, i_k}$, visto che V_{i_1, \dots, i_k} è ottenuto componendo similitudini di rapporto c_{i_j} ; inoltre, per la (7), $B_{(\min_i c_i) a_1 r} \subset B_{c_{i_1} \cdots c_{i_k} a_1}$. Analogamente si ha che $V_{i_1, \dots, i_k} \subset B_{c_{i_1} \cdots c_{i_k} a_2} \subset B_{a_2 r}$. In conclusione, vale

$$B_{(\min_i c_i) a_1 r} \subset V_{i_1, \dots, i_k} \subset B_{a_2 r}.$$

Sia inoltre $\mathcal{Q}_1 \subset \mathcal{Q}$ l'insieme delle successioni tali che $B_r \cap \bar{V}_{i_1, \dots, i_k} \neq \emptyset$. Si afferma che \mathcal{Q}_1 è finito; vale infatti il seguente lemma:

²Una giustificazione dettagliata si ha in [1, § 9.1], nel commento successivo al teorema 9.1 di esistenza e unicità degli attrattori.

Lemma 3.8. *Sia $\{V_i\}$ una famiglia di aperti disgiunti tali che, per ogni i , $B_{a_1 r} \subset V_i \subset B_{a_2 r}$. Allora una B_r interseca al più $(1 + 2a_2)^n a_1^{-n}$ dei \bar{V}_i .*

Dimostrazione. Se $\bar{V}_i \cap B_r(x_0) \neq \emptyset$, allora $\bar{V}_i \subset B_{(1+2a_2)r}(x_0)$; se q dei \bar{V}_i intersecano B_r , sommando le misure delle bolle interne si ha

$$q(a_1 r)^n \leq (1 + 2a_2)^n r^n. \quad \square$$

Perciò $\text{card } \mathcal{Q}_1 \leq (1 + 2a_2)^n a_1^{-n} (\min c_i)^{-n} =: q$, da cui

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(B_r) &= \tilde{\mu}(F \cap B_r) = \mu(\{(i_1, i_2, \dots) : x_{i_1, i_2, \dots} \in F \cap B_r\}) \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \mu\left(\bigcup_{\mathcal{Q}_1} I_{i_1, \dots, i_k}\right) \leq \sum_{\mathcal{Q}_1} \mu(I_{i_1, \dots, i_k}) = \sum_{\mathcal{Q}_1} (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^\alpha \\ &\stackrel{(7)}{\leq} \sum_{\mathcal{Q}_1} r^\alpha = r^\alpha \text{card } \mathcal{Q}_1 \leq r^\alpha q; \end{aligned} \quad (8)$$

in (*) si è usato il fatto che, se $x_{i_1, i_2, \dots} \in F \cap B_r \subset F \subset \bigcup_{\mathcal{Q}} \bar{V}_{i_1, \dots, i_k}$, allora, per come è definito \mathcal{Q}_1 , esiste un indice k tale che $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}_1$.

Prendendo ora un U con $\text{diam } U < \varepsilon$, sicuramente $U \subset B_{\text{diam } U}$, perciò, per la (8),

$$\tilde{\mu}(U) \leq \tilde{\mu}(B_{\text{diam } U}) \leq (\text{diam } U)^\alpha q,$$

e si ha la (6). Dal Lemma 3.7 si ha allora

$$\mathcal{H}_\alpha(F) \geq \frac{\tilde{\mu}(F)}{q} = q^{-1} > 0. \quad \square$$

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] K. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley & Sons, 2004².
- [2] G. B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley & Sons, 2013².