La matematica del Sudoku

Martina Monti

Il Sudoku è diventato un puzzle molto popolare che molti giornali propongono come appuntamento giornaliero. Il gioco consiste in una griglia di 9 x 9 celle, in ognuna delle quali si deve collocare un numero da 1 a 9, in modo tale che in ognuna delle 9 righe, colonne o sottogriglie 3 x 3, compaiano tutte e sole le cifre da 1 a 9. Coloro che tentano di risolvere un Sudoku, ma sopratutto i matematici, si pongono diversi interrogativi:
1. per un dato Sudoku esiste una soluzione?
2. se la soluzione esiste è unica?
3. se la soluzione non è unica quante soluzioni esistono?
4. esiste una procedura sistematica per determinarne le soluzioni?
5. quanti sono i Sudoku con soluzione unica?
6. qual é il numero minimo di dati specifico che garantisce l'unicità della soluzione?

Noi riformuleremo molti di questi interrogativi in un contesto matematico per tentare di trovare le risposte. Più precisamente, interpretiamo il Sudoku come un problema di colorazione dei vertici all'interno della teoria dei grafi. Aggiungo che il problema di colorazione dei grafi codifica molti problemi di programmazione, basti pensare alla programmazione di un orario scolastico.
Diamo quindi qualche definizione sulla teoria dei grafi.

1 Polinomi cromatici

Definizione 1.1. *Un grafo G è formato da un insieme non vuoto V di vertici e un insieme E formato da sottoinsiemi binari di elementi di V, detti bordi. Due vertici sono detti adiacenti se esiste un bordo che li collega.*

Nell'ambito della teoria dei grafi un problema importante è quello della colorazione: cercare di colorare i vertici del grafo in modo che quelli adiacenti non abbiamo lo stesso colore. Più precisamente:

Definizione 1.2. *Un λ-colorato di un grafo G è una mappa f dall'insieme dei vertici di G a $\{1, 2 \dots \lambda\}$. Pertanto una mappa si definisce colorata completa se $f(x) \neq f(y)$ con $x \neq y \in G$. Il numero minimo di colori richiesti per colorare completamente i vertici di un grafo G è detto numero cromatico e viene denotato con $\chi(G)$.*

Pertanto il Sudoku diventa un problema di colorazione di un grafo: le 81 celle della griglia rappresenteranno i vertici, diremo che due vertici sono adiacenti se si trovano sulla stessa riga o colonna o nella stessa sottogriglia. Con tale interpretazione possiamo dire che un Sudoku corrisponde a un colorato completo

di questo grafo.
Più in generale si può considerare una griglia n^2xn^2, associando ad una cella un vertice (i,j) con $0 \leq i, j \leq n^2 - 1$; diremo che (i,j) e (i',j') sono adiacenti se i=i' oppure j=j' oppure $[i/n] = [i'/n]$ e $[j/n] = [j'/n]$. Indicheremo tale grafo con X_n, mostreremo che sarà completo usando n^2 colori. Pertanto un puzzle Sudoku corrisponde a un colorato parziale e il problema è vedere quando questo colorato parziale può esser completato a un colorato completo.
Siamo quindi interessati a capire sotto quali condizioni si può colorare completamento il grafo X_n e mostrare che il numero cromatico è n^2 (Ciò conferma anche il fatto che nel Sudoku classico, da indicato con X_3 effettivamente 9 colori bastano!)
In generale il numero di modi per colorare un dato un grafo G con λ colori è ben noto ed espresso da un polinomio in λ di grado uguale al numero di vertici di G.

Teorema 1.1. *Sia G un grafo finito di v vertici. Sia C un parziale colorato di G di t vertici formato con d_o colori. Sia $p_{G,C}(\lambda)$ il numero di modi per completare la colorazione usando λ colori per ottenere un colorato completo di G. Allora $p_{G,C}(\lambda)$ è un polinomio nella variabile λ con coefficienti interi di grado v-t per $\lambda \geq d_o$.*

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema per induzione sui bordi del grafo (G,C). Consideriamo 3 casi:

1. Supponiamo che G abbia un solo vertice v_o non contenuti in C. Se non e adiacenti ad ogni vertice di C allora G è l'unione disgiunta di C e v_o per cui possiamo colorare v_o con ognuno dei λ colori. Se il vertice è adiacente a d vertici di C colorati con d_o colori allora $p_{G,C}(\lambda) = max(\lambda - d_o, 0)$.

2. Supponiamo e un bordo che unisce due vertici di G, col al più uno contenuto in C. Indichiamo con G-e il grafo ottenuto da G eliminando il bordo e, ma non i punti finali; mentre se identifichiamo i vertici uniti da e (rimovendo i bordi multipli) indichiamo G/e. Abbiamo perciò che $p_{G,C}(\lambda) = p_G - e,_C(\lambda) - p_G/e,_C(\lambda)$ poiché un colorato completo di G lo è anche per G-e, ma il viceversa vale se e solo se si hanno due colori diversi per i vertici finali del bordo e, perciò bisogna togliere i colorati che assegnano lo stesso colore a tali vertici ovvero quelli di G/e. Sia G-e che G/e hanno meno bordi di G per cui si applica l'induzione e si ottiene la tesi.

3. se ogni vertice di G è contenuti in C abbiamo già un colorato per G quindi $p_{G,C}(\lambda) = 1$

□

Grazie a questo teorema possiamo subito avere una condizione necessaria e sufficiente per l'unicità della soluzione: Abbiamo un'unica soluzione se e solo se $p_{G,C}(\lambda) = 1$.
E' interessante capire anche sotto quali condizioni un colorato parziale può essere esteso a un colorato completo. Abbiamo quindi questo teorema:

Teorema 1.2. *Sia G un grafo con numero cromatico $\chi(G)$ e C un parziale colorato di G che utilizza solo $\chi(G)$-2 colori. Se il parziale può essere completato in colorato completo di G, allora ci sono al più due modi per estendere la colorazione.*

Dimostrazione. Dal momento che due colori non sono stati utilizzati nel parziale colorato iniziale, questi posso essere scambiati nel colorato completo finale ottenendo così due colorazioni complete diverse. □

Abbiamo così un condizione necessaria per *l'unicità* di un colorato completo di G: bisogna utilizzare almeno $\chi(G)$-1 colori. Per cui nel classico sudoku X_3 servono almeno 8 colori. In generale per un Sudoku n^2xn^2 servono almeno n^2-1 colori nel parziale colorato affinchè il puzzle abbia una soluzione unica.

Osservazione 1.1. *La molteplicità delle soluzioni può essere spiegata anche attraverso i polimomi cromatici. Se d_o è il numero dei colori usati, abbiamo visto grazie al teorema 1 che $p_{X_3,C}(\lambda)$ è un polinomio in λ purchè $\lambda \geq d_o$. Poichè il numero cromatico di X_3 è 9 dobbiamo avere che $p_{X_3,C}(\lambda) = 0$ per $\lambda = d_o, d_o+1, \ldots 8$. Inoltre è un polinomio ad una variabile con coefficienti interi, per cui: $p_{x_3,C}(\lambda) = [(\lambda-d_o)(\lambda-d_o+1)\ldots(\lambda-8)]q(\lambda)$. Ponendo $\lambda = 9$ si ha: $p_{X_3,C}(9) = (9-d_o)!q(9)$ da cui ottengo RHG ≥ 2, ovvero esistano almeno 2 modi per colorare il grafo, se $d_o \leq 7$.*

2 Colorazione per X_n

In questa sezione mostreremo come si può colorare completamente il grafo sudoku X_n. Sappiamo che in numero cromatico di un grafo è il numero minimo di colori necessari per colorare completamente i suoi vertici.

Definizione 2.1. *Un grafo K_n composto da n vertici è detto completo se ogni vertice è adiacente ad ogni altro vertice*

Per cui possiamo dire che il numero cromatico di un grafo completo K_n è n.

Teorema 2.1. *Per ogni numero naturale n, c'è un colorato completo del grafo sudoku X_n usando n^2 colori; per cui il numero cromatico di X_n è n^2.*

Dimostrazione. Notiamo subito che all'interno del grafo sudoku abbiamo già un grafo completo: le griglie nxn hanno i vertici che sono adiacenti a tutti gli altri in quella griglia, per cui abbiamo un grafo isomorfo a K_n^2. Sappiamo che il numero cromatico di K_n^2 è n^2 e così X_n necessita almeno di n^2 colori per essere un colorato completo. Mostriamo ora che effettivamente $\chi(G) = n^2$. Come notato in precedenza conviene etichettare i vertici (i,j) con $0 \leq i, j \leq n^2 - 1$ e consideriamo le classi modulo n^2. Scriviamo $i = t_i n + d_i$ con $0 \leq d_i \leq n-1$ e $0 \leq t_i \leq n-1$ e similmente per $0 \leq j \leq n^2 - 1$. Assegnamo il colore $c(i,j) = d_i n + t_i + t_j n + d_j$ modulo ridotto n^2. Affermiamo che in questo caso si ha un colorato completo, per vedere ciò mostriamo che due coordinate adiacenti (i,j), (i',j') hanno colori distinti. Se $i = i'$ allora $c(i,j) \neq c(i',j')$ a meno che $j = j'$. Se $c(i,j) = c(i',j')$ allora $t_j n + d_j = t'_j n + d'_j$ cioè $j = j'$. Allo stesso modo si dimostra invertendo i ruoli di i e j. Infine se $[i/n] = [i'/n]$ e $[j/n] = [j'/n]$ allora $t_i = t'_i$ e $t_j = t'_j$; quindi se $c(i,j) = c(i',j')$ allora $d_i + nd_j = d'_i + nd'_j$

che modulo n si ottiene $d_i=d'_i$ e quindi $d_j=d'_j$. Pertanto, questo è un colorato completo. $\square$

Concludo con un problema che non è stato ancora risolto: *il minimo puzzle Sudoku*
Ci si può chiedere quale sia il numero minimo di dati specifici da dare in un puzzle Sudoku in modo da avere una soluzione unica. Ad oggi si è mostrato che con 17 dati specifici si ha una soluzione unica, ma ancora non si sa se con 16 o meno dati possa esserci soluzione unica.