Come passarla liscia: teorema di approssimazione di Whitney

Luca Marannino

4 maggio 2018 - FuoriOrario II

In queste note ci si propone di dare una dimostrazione completa del cosiddetto *teorema di approssimazione di Whitney* seguendo una sequenza di esercizi proposti nel volume *Geometria Differenziale* di M. Abate e F. Tovena (Springer 2011). Si tratta in particolare degli esercizi 5.13, 5.15, 5.16, 5.17, 5.18 alle pagine 302-303.

Salvo diverso avviso per tutte le definizioni considerate (a partire da quella di varietà differenziabile) e per eventuali richiami di risultati dati per noti ci rifaremo al testo in questione, che indicheremo con A-T nel seguito

L'enunciato del teorema è il seguente:

Teorema 1. *Siano* N *e* M *due varietà differenziabili e sia* $\mathrm{F}\colon \mathrm{N} \to \mathrm{M}$ *una applicazione continua. Allora esistono una applicazione differenziabile* $\tilde{\mathrm{F}}\colon \mathrm{N} \to \mathrm{M}$ *e una omotopia* $\mathrm{H}\colon \mathrm{N}\times[0,1] \to \mathrm{M}$ *continua tra* F *e* $\tilde{\mathrm{F}}$*. In particolare se* F *è differenziabile su un sottoinsieme chiuso* $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{N}$ *allora è possibile scegliere* H *in modo che sia costante su* A*.*

Per giungere alla dimostrazione di questo risultato ci serviremo di alcuni lemmi preparatori e assumeremo che la varietà M di arrivo sia una sottovarietà propria di $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ per qualche $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$. Sappiamo che questo non lede in generalità perché data una varietà differenziabile M di dimensione m è sempre possibile trovare un embedding proprio di M in $\mathbb{R}^{2\mathrm{m}+1}$. Questo risultato (teorema 2.8.13 di A-T) è dovuto allo stesso Whitney e va oltre gli scopi di questo lavoro.

Iniziamo ricordando la definizione di partizione dell'unità.

Definizione 2. *Una* ***partizione dell'unità*** *su una varietà differenziabile M è una famiglia* $\{\rho_\alpha\} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathrm{M})$ *tale che:*

1. $0 \leq \rho_\alpha \leq 1$ *su* M *per ogni indice* α
2. $\{\mathrm{supp}(\rho_\alpha)\}$ *è un ricoprimento localmente finito di* M
3. $\sum_\alpha \rho_\alpha \equiv 1$ *su* M

Se inoltre $\mathcal{U} = \{\mathrm{U}_\alpha\}$ *è un ricoprimento aperto di* M *diremo che la partizione dell'unità* $\{\rho_\alpha\}$ *è subordinata al ricoprimento* $\mathcal{U}$ *se vale che* $\mathrm{supp}(\rho_\alpha) \subset \mathrm{U}_\alpha$ *per ogni indice* α*.*

Ricordiamo che data una varietà differenziabile M e un ricoprimento aperto di M esiste sempre una partizione dell'unità subordinata a tale ricoprimento (teorema 2.7.12 di A-T)

Lemma 3. *Sia* M *una varietà differenziabile e sia* $\delta\colon \mathrm{M} \to \mathbb{R}$ *una funzione continua e sempre positiva. Allora per ogni applicazione continua* $\mathrm{F}\colon \mathrm{M} \to \mathbb{R}^{\mathrm{k}}$ *esiste una applicazione differenziabile* $\hat{\mathrm{F}}\colon \mathrm{M} \to \mathbb{R}^{\mathrm{k}}$ *tale che* $\|\mathrm{F}(\mathrm{p}) - \hat{\mathrm{F}}(\mathrm{p})\| < \delta(\mathrm{p})\ \forall \mathrm{p} \in \mathrm{M}$*. Se* F *è differenziabile su un sottoinsieme chiuso* $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{M}$ *è possibile scegliere* $\hat{\mathrm{F}}$ *in modo che* $\mathrm{F}|_{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{F}}|_{\mathrm{A}}$*.*

Dimostrazione. Costruiamo innanzitutto una estensione liscia di $F|_A$ a tutta la varietà M. Sia $V \supset A$ un intorno aperto di A e $\forall p \in A$ consideriamo un intorno aperto $U_p \ni p$ tale che $\overline{U_p}$ sia compatto e che $\overline{U_p} \subset V$. Sia $U_0 = M \setminus A$.

Osserviamo che $\mathcal{U} = \{U_0\} \cup \{U_p\}_{p\in A}$ è un ricoprimento aperto di M. Consideriamo una partizione dell'unità $\{\rho_0\} \cup \{\rho_p\}_{p\in A}$ subordinata a tale ricoprimento.

Siccome $\overline{U_p}$ è compatto $\forall p \in A$ allora per la proposizione 2.7.2 di A-T esistono funzioni $h_p \colon : M \to \mathbb{R}$, $h_p \in \mathcal{C}^\infty(M)$, tali che $h_p|_{U_p} \equiv 1$ e che $h_p|_{M\setminus V} \equiv 0$.

Definiamo ora la funzione $h \colon M \to \mathbb{R}$ nel modo seguente:

$$h(q) \colon = \sum_{p\in A} h_p(q)\ \rho_p(q)$$

Chiaramente h è ben definita e $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$. In particolare osserviamo che:

- se $q \in A$ allora
$$h(q) = \sum_{p\in A} h_p(q)\ \rho_p(q) = \sum_{p\in A} \rho_p(q) = 1$$
per le proprietà delle partizioni dell'unità e delle $\{h_p\}$
- se $q \in M \setminus V$ allora $h(q) = 0$ visto che $h_p(q) = 0\ \forall p \in A$

Ricordiamo ora che $F|_A$ differenziabile significa che esiste $W \supset A$ intorno aperto di A sul quale è definita una applicazione differenziabile $G \colon W \to \mathbb{R}^k$ tale che $G|_A = F$.

Dato W sappiamo che è possibile trovare un intorno aperto V di A e un intorno aperto U di $M \setminus W$ tali che $U \cap V = \emptyset$ (questo segue dal fatto che ogni varietà differenziabile è uno spazio topologico T4, essendo T2 e paracompatto). Costruiamo h associata a V come in precedenza e ha senso definire $F_0 \colon M \to \mathbb{R}^k$ nel modo seguente:

$$F_0(q) = \begin{cases} h(q)G(q) & \text{se } q \in W \\ 0 & \text{se } q \in M \setminus \overline{V} \end{cases}$$

Siccome $\mathrm{supp}(h) \subset V$ deduciamo che F_0 è differenziabile ed è immediato osservare che $F_0|_A = F|_A$.

Poniamo ora $V_0 \colon = \{q \in M : \quad \|F_0(q) - F(q)\| < \delta(q)\}$ e osserviamo che chiaramente V_0 è aperto e vale che $A \subset V_0$.

Sia $p \in M \setminus A$ e consideriamo la funzione $g_p \colon M \to \mathbb{R}$ data da

$$g_p(q) \colon = \delta(q) - \|F(p) - F(q)\|$$

Evidentemente g_p è continua e vale che $g_p(p) = \delta(p) > 0$.

Definiamo allora

$$V_p \colon = (M \setminus A) \cap g_p^{-1}\left(\frac{1}{2}\delta(p), \frac{3}{2}\delta(p)\right)$$

Chiaramente V_p è aperto, $p \in V_p$ e vale che $V_p \cap A = \emptyset$. Inoltre $\forall q \in V_p$ vale chiaramente che $g_p(q) > 0$ ovvero in altri termini $\|F(p) - F(q)\| < \delta(q)$.

La collezione $\mathcal{V} = \{V_0\} \cup \{V_p\}_{p\in M\setminus A}$ è un ricoprimento aperto di M. Possiamo pertanto considerare una partizione dell'unità $\{\tau_0\} \cup \{\tau_p\}$ subordinata a tale ricoprimento.

Definiamo infine $\hat{F} \colon M \to \mathbb{R}^k$ come

$$\hat{F}(q) \colon = \tau_0(q)F_0(q) + \sum_{p\in M\setminus A} \tau_p(q)F(p)$$

Ovviamente $\hat{F}$ è ben definita e differenziabile.

Osserviamo per concludere che $\hat{F}$ soddisfa la nostra tesi. Infatti:

- se $q \in A$ allora $\hat{F}(q) = F_0(q) = F(q)$
- se $q \in M \setminus A$ allora vale che

$$\begin{aligned}
\|F(p) - \hat{F}(p)\| &= \left\| F(q)\left(\tau_0(q) + \sum_{p \in M\setminus A} \tau_p(q)\right) - \tau_0(q)F_0(q) + \sum_{p \in M\setminus A} \tau_p(q)F(p) \right\| \\
&= \left\| \tau_0(q)(F(q) - F_0(q)) + \sum_{p \in M\setminus A} \tau_p(q)(F(q) - F(p)) \right\| \\
&\leq \tau_0(q)\|F(q) - F_0(q)\| + \sum_{p \in M\setminus A} \tau_p(q)\|F(q) - F(p)\| \\
&< \tau_0(q)\delta(q) + \sum_{p \in M\setminus A} \tau_p(q)\delta(q) \\
&= \delta(q)
\end{aligned}$$

dove abbiamo fatto uso della disuguaglianza triangolare, delle proprietà della partizione dell'unità e di quanto preteso sugli aperti V_0 e $\{V_p\}_{p \in M\setminus A}$.

□

Come preannunciato ci concentriamo ora sulle varietà immerse in $\mathbb{R}^n$. L'idea è sfruttare a nostro vantaggio la struttura di spazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^n$ per poter effettuare costruzioni che altrimenti richiederebbero nozioni più precise di geometria riemanniana.

Definizione 4. *Sia* M *una sottovarietà (propria) di* $\mathbb{R}^n$ *di dimensione* $m < n$. *Consideriamo* $\forall p \in M$ *lo spazio tangente* T_pM *a* M *in* p *(indicato al solito con* T_pM*) visto come sottospazio di* $T_p\mathbb{R}^n$ *(identificato a sua volta con* $\mathbb{R}^n$*). Definiamo lo* ***spazio normale*** *in* p *a* M *come*

$$N_pM := (T_pM)^\perp$$

ovvero come il complemento ortogonale di T_pM *in* $T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$.

Definizione 5. *Sia* M *una sottovarietà di* $\mathbb{R}^n$ *di dimensione* $m < n$. *Definiamo il* ***fibrato normale*** *alla varietà* M *come:*

$$NM := \bigsqcup_{p \in M} N_pM$$

Lemma 6. *Sia* M *una sottovarietà di* $\mathbb{R}^n$ *di dimensione* $m < n$. *Allora* NM *possiede effettivamente una struttura naturale di fibrato vettoriale su* M *di rango* $n - m$.

Dimostrazione. Per definizione di sottovarietà l'inclusione $M \subseteq \mathbb{R}^n$ è un embedding liscio. Allora grazie al teorema del rango (teorema 2.4.17 e corollario 2.4.18 di A-T) possiamo affermare che $\forall p \in M$ esiste una carta (V, ψ) di $\mathbb{R}^n$ centrata in p tale che

$$\psi(V \cap M) = \psi(V) \cap (\mathbb{R}^m \times \{O\})$$

In altri termini la carta (V, ψ) è tale che se $\tilde{\psi}: V \cup M \to \mathbb{R}^m$ è la composizione di ψ con la proiezione sulle prime m coordinate allora $(V \cup M, \tilde{\psi})$ è una carta di M. In particolare osserviamo che $\forall \underline{t} = (t_1, \dots, t_m) \in \tilde{\psi}(V \cap M)$ vale che

$$\psi \circ \tilde{\psi}^{-1}(\underline{t}) = (t_1, \dots, t_m, 0, \dots, 0)$$

Se V è centrato in p e $\tilde{\psi}(p) = (t_1, \ldots, t_m)$ poniamo allora

$$J_p \colon = \text{Jac } \psi^{-1}(t_1, \ldots, t_m, 0, \ldots, 0)$$

Risulta immediato osservare che le prime m colonne della matrice J_p definiscono una base di T_pM come sottospazio di $T_p\mathbb{R}^n$ (infatti tali colonne sono le colonne della Jacobiana di $\tilde{\psi}^{-1}$ nel punto $(t_1, \ldots, t_m)$ e per qualsiasi carta esse individuano una base dello spazio tangente in p).

Affermiamo che le colonne di J_p indiciate da $m + 1$ a n costituiscono una base di N_pM come sottospazio di $T_p\mathbb{R}^n$. Sicuramente tali vettori sono tra loro linearmente indipendenti visto che la matrice J_p è invertibile (ψ è diffeomorfismo). Basta mostrare che ciascuno di essi è ortogonale a tutti i vettori che costituiscono una base di T_pM. Per mostrare questa seconda condizione sfrutteremo il teorema del Dini (caso multidimensionale).

Sia infatti $f \colon V \to \mathbb{R}^{m-n}$ data dalle componenti da $m + 1$ a n della applicazione ψ, ovvero $f = (\psi_{m+1}, \ldots, \psi_n)$. Ovviamente $f(p) = \underline{0}$ e la Jacobiana di f in p ha per colonne i vettori della nostra candidata base per N_pM. In particolare tale Jacobiana ha rango massimo perché altrimenti J_p non sarebbe invertibile. Per il teorema del Dini a meno di riordinare le coordinate possiamo supporre che se $p = (y_1, \ldots, y_m, y_{m+1}, \ldots, y_n)$ e poniamo $\underline{y}' = (y_1, \ldots, y_m)$ allora in un intorno $U \subset \mathbb{R}^n$ di $\underline{y}'$ è definita una funzione $\phi : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ che è $\mathcal{C}^\infty$ ed è tale che:

- $f(\underline{x}, \phi(\underline{x}) = 0 \ \forall \underline{x} \in U$
- $\text{Jac } \phi = -(\text{Jac } f_{\phi(\underline{x})})^{-1} \cdot (\text{Jac } f_{\underline{x}})$

dove come di consueto abbiamo indicato con Jac $f_{\underline{z}}$ la matrice ottenuta estraendo dalla jacobiana di f le colonne corrispondenti all'indicizzazione data da $\underline{z}$.

In questo modo l'assegnazione $\Phi \colon \underline{x} \mapsto (\underline{x}, \phi(\underline{x}))$ funziona come inversa di una carta locale in un intorno di p e vale che le colonne di Jac $\Phi(\underline{y}')$ forniscono senz'altro una base di T_pM. D'altra parte è chiaro che

$$\text{Jac } \Phi = \left[\frac{I_m}{\text{Jac } \phi} \right] = \left[\frac{I_m}{-(\text{Jac } f_{\phi(\underline{x})})^{-1} \cdot (\text{Jac } f_{\underline{x}})} \right]$$

e abbiamo detto che a meno di riordino vale che

$$\text{Jac } f = \left[\ \text{Jac } f_{\underline{x}} \ \middle| \ \text{Jac } f_{\phi(\underline{x})} \ \right]$$

Eseguendo il prodotto di matrici a blocchi segue immediatamente che

$$\text{Jac } f \cdot \text{Jac } \Phi = O$$

Lavorando sul punto p in questione deduciamo che in effetti ogni colonna di Jac f è ortogonale a tutti i vettori che costituiscono una base di T_pM e pertanto la nostra affermazione sul fatto che le colonne di J_p indiciate da $m + 1$ a n costituiscano una base di N_pM come sottospazio di $T_p\mathbb{R}^n$ è dimostrata.

Osserviamo che il fatto di concentrarsi su un punto in particolare non crea problemi.

Data la carta (V, ψ) avremmo potuto ragionare in questo modo per qualsiasi punto $q \in V \cap M$. Inoltre è facile verificare che M ammette un atlante formato da carte del tipo $(V \cap M, \tilde{\psi})$ (mantenendo la notazione usata in precedenza).

Possiamo ora passare a descrivere la struttura di fibrato vettoriale di NM.

Sia infatti $\pi_N \colon NM \to M$ la proiezione ovvia (se $v \in N_pM$ allora $\pi_N(v) = p$). Ad ogni punto $p \in M$ associamo una carta di $\mathbb{R}^n$ del tipo (V, ψ) visto in precedenza (e la carta relativa $(V \cap M, \tilde{\psi})$ di M). Indichiamo $\forall q \in V \cap M$ con $\{v^q_{m+1}, \dots, v^q_n\}$ la base di N_qM ottenuta estraendo da $J_q = \text{Jac}\ \psi^{-1}(\psi(q))$ le ultime $n-m$ colonne. Definiamo infine

$$\chi_p \colon \pi_N^{-1}(V \cap M) \to (V \cap M) \times \mathbb{R}^{n-m} \qquad \sum_{j=1}^{m-n} \alpha_j v^q_{m+j} \mapsto (q, \underline{\alpha})$$

Lasciamo al lettore il compito di verificare che le χ_p definite in questo modo soddisfano le ipotesi della proposizione 3.1.7 di A-T, ovvero sono delle buone banalizzazioni locali. Esse inducono pertanto su NM un'unica struttura di fibrato vettoriale su M di rango $n-m$.

Osserviamo per concludere che una volta svolte queste verifiche risulta immediato identificare NM con una sottovarietà di $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ di dimensione $m + (n-m) = n$ $\square$

Definizione 7. *Sia* M *una sottovarietà di* $\mathbb{R}^n$ *di dimensione* $m < n$ *di fibrato normale* $NM \subseteq T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$*. Sia* $E : NM \to \mathbb{R}^n$ *tale che* $E(p, v) = p + v$ *(è immediato verificare che* E *è differenziabile). Diremo* ***intorno tubolare*** *di* M *un intorno aperto* U *di* M *in* $\mathbb{R}^n$ *che sia immagine diffeomorfa tramite* E *di un aperto* $V \subset NM$ *della forma* $V = \{(p, v) \in NM : \ \|v\| < \delta(p)\}$ *dove* $\delta \colon M \to \mathbb{R}$ *è una funzione continua sempre positiva.*

Notiamo che in questa definizione di intorno tubolare norme e distanze sono sempre considerate nello spazio ambiente $\mathbb{R}^n$ e stiamo pensando ai vettori di N_pM come applicati in p. Nel seguito assumeremo sempre questa convenzione più intuitiva da un punto di vista geometrico e utile dal punto di vista dimostrativo.

Lemma 8. *Ogni sottovarietà (propria)* M *di* $\mathbb{R}^n$ *di dimensione* $m < n$ *ammette un intorno tubolare. Inoltre è possibile chiedere che la funzione* δ *della definizione precedente sia differenziabile.*

Dimostrazione. Osserviamo che la applicazione $E \colon NM \to \mathbb{R}^n$ descritta nella definizione precedente è localmente invertibile nei punti di NM del tipo $(p, \underline{0})$ (che possiamo identificare con i punti della varietà M in un certo senso). Infatti sia $p \in M$ e sia (V, ψ) carta di $\mathbb{R}^n$ associata a p con le proprietà richiesta nel lemma precedente. Abbiamo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
\pi_N^{-1}(V \cap M) \cap E^{-1}(V) \arrow[r, "E"] \arrow[d, "(\tilde{\psi}, \mathrm{id}) \circ \chi_p"] & V \arrow[d, "\psi"] \\
\tilde{\psi}(V \cap M) \times \mathbb{R}^{n-m} & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

Poniamo anzitutto $\hat{\psi} = (\tilde{\psi}, \text{id}) \circ \chi_p$. In coordinate locali se

$$\hat{\psi}((q, v)) = (t_1, \dots, t_m, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-m}) = (\underline{t}, \underline{\alpha})$$

e come in precedenza

$$\{v^q_{m+1}, \dots, v^q_n\}$$

è la base di N_qM ottenuta estraendo da $J_q = \text{Jac}\ \psi^{-1}(\psi(q))$ le ultime $n-m$ colonne abbiamo che:

$$\psi \circ E \circ \hat{\psi}((\underline{t}, \underline{\alpha})) = \psi \left(\tilde{\psi}^{-1}(\underline{t}) + \sum_{j=1}^{n-m} \alpha_j (v^q_{m+j})^t \right)$$

Lasciamo al lettore la verifica del fatto che se $\tilde{E} = \psi \circ E \circ \hat{\psi}$ (definita dove ha senso) allora nei punti del tipo $(\underline{t}, \underline{0})$ del dominio di $\tilde{E}$ - sicuramente in un intorno aperto del punto $\hat{\psi}(p, \underline{0})$ se V è centrato in p - vale che

$$\text{Jac}\ \tilde{E}((\underline{t}, \underline{0})) = I_n$$

Allora (teorema della funzione inversa per varietà, corollario 2.3.29 di A-T) ricaviamo che $\forall p \in M \subset \mathbb{R}^n$ esistono un intorno aperto U_p di $(p, \underline{0})$ in NM, un intorno aperto $W_p \ni p$ in $\mathbb{R}^n$ tali che $E|_{U_p} \colon U_p \to W_p$ sia un diffeomorfismo. A meno di restrizioni possiamo supporre che

$$U_p = \{(q, w) \in NM : \quad q \in B(p, \epsilon_p) \cap M,\ \|w\| < \epsilon_p\}$$

per qualche ϵ_p con $0 < \epsilon_p < 1$ in modo che $B(p, \epsilon_p) \cap M$ sia connesso.

Poniamo ora

$$A := \bigcup_{p \in M} U_p \qquad B := \bigcup_{p \in M} W_p$$

e osserviamo che $E|_A \colon A \to B$ è un diffeomorfismo locale.

Chiaramente $\mathcal{U} := \{B(p, \epsilon_p) \cap M\}_{p \in M}$ è un ricoprimento aperto di M (visto che per definizione di sottovarietà la topologia su M coincide con quella indotta da $\mathbb{R}^n$).

Estraiamo da tale ricoprimento un sottoricoprimento numerabile (è possibile perché M è a base numerabile per definizione) $\mathcal{U}' := \{B(p_j, \epsilon_{p_j}) \cap M\}_{j \in \mathbb{N}}$ e d'ora in poi scriviamo $B_j := B(p_j, \epsilon_{p_j})$.

Sia ora $\{\rho_j\}$ una partizione dell'unità subordinata a $\mathcal{U}'$.

Sappiamo allora che $\{\text{supp}(\rho_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ è un ricoprimento localmente finito di M. Inoltre abbiamo che $\text{supp}(\rho_j) \subset B_j$ è compatto $\forall j$.

In particolare, sempre lavorando in $\mathbb{R}^n$ avremo che

$$\eta_j := \text{dist}(\text{supp}(\rho_j), \partial B_j) > 0$$

Poniamo allora $\forall j \in \mathbb{N}$

$$\delta_j := \min\{\eta_j, \epsilon_j\}$$

e definiamo una funzione $\delta \colon M \to \mathbb{R}$ nel modo seguente:

$$\delta(p) := \frac{1}{2} \sum_j \rho_j(p) \delta_j$$

È immediato osservare che δ è differenziabile e che $\delta(p) > 0$ $\forall p \in M$.

Sia poi

$$U := \{(p, v) \in NM : \quad \|v\| < \delta(p)\}$$

Chiaramente $U \subset A$ quindi se mostriamo che $E|_U \colon U \to E(U)$ è iniettiva la dimostrazione è conclusa perché a quel punto E(U) è l'intorno tubolare cercato.

Supponiamo per assurdo che esistano $(p_1, v), (p_2, w) \in U$ tali che

$$E((p_1, v)) = p_1 + v = p_2 + w = E((p_2, w))$$

Poniamo $\forall p \in M$

$$\delta_p^\star := \max_{j \in \mathbb{N}, \rho_j(p) \neq 0} \delta_j$$

e indichiamo con j_p l'indice che realizza tale massimo.

Sappiamo che tale definizione è ben posta visto che $\{\mathrm{supp}(\rho_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ è un ricoprimento localmente finito di M. In particolare senza ledere in generalità assumiamo che $\delta^\star_{p_1} \geq \delta^\star_{p_2}$.

Abbiamo allora che (facile verifica)

$$\|p_1 - p_2\| \leq \|v\| + \|w\| < \delta(p_1) + \delta(p_2) \leq \frac{1}{2}(\delta^\star_{p_1} + \delta^\star_{p_2}) \leq \delta^\star_{p_1}$$

Deduciamo che necessariamente deve valere che $p_2 \in B_{j_{p_1}}$.

Ma

$$\|v\| < \delta^\star_{p_1} \leq \epsilon_{j_{p_1}}$$

e d'altra parte

$$\|w\| < \delta(p_2) \leq \delta^\star_{p_2} \leq \delta^\star_{p_1} \leq \epsilon_{j_{p_1}}$$

Vale quindi $(p_1, v), (p_2, w) \in U_{j_{p_1}}$ e per come abbiamo scelto gli U_p necessariamente deve valere che $p_1 = p_2$ e $v = w$, ovvero la nostra tesi. □

Lemma 9. *Sia* M *una sottovarietà di* $\mathbb{R}^n$ *di dimensione* $m < n$ *e sia* $U \supset M$ *un intorno tubolare di* M*. Allora esiste una retrazione per deformazione liscia* $\rho\colon U \to M$*.*

Dimostrazione. Consideriamo U e V (che sono aperti nei rispettivi spazi ambiente) come varietà differenziabili con la struttura differenziabile rispettivamente indotta.

Per definizione U è immagine diffeomorfa tramite la solita applicazione $E\colon NM \to \mathbb{R}^n$ di $V = \{(p, v) \in NM : \quad \|v\| < \delta(p)\} \subset NM$ dove $\delta\colon M \to \mathbb{R}$ è una funzione continua sempre positiva. Indichiamo (impropriamente) con $E^{-1}\colon U \to V$ l'inversa di $E|_V$ e consideriamo la applicazione $\rho\colon U \to M$ data da $\rho(x) := \pi_N \circ E^{-1}(x)$. Chiaramente tale applicazione è differenziabile e notiamo che si tratta di fatto della proiezione ortogonale sulla varietà M.

Risulta altrettanto chiaro che se $\iota : M \to U$ è l'inclusione allora $\rho \circ \iota = \mathrm{id}_M$; pertanto ρ è una retrazione liscia. Per mostrare che ρ è retrazione per deformazione liscia occorre mostrare che $\iota \circ \rho$ e id_U sono applicazioni $\mathcal{C}^\infty$ omotope.

Sia $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione *gradino* descritta dalla equazione (5.9) a pagina 261 di A-T. Si ha che $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ è tale che $\alpha(t) = 0$ se $t \leq 0$, $\alpha(t) = 1$ se $t \geq 1$, α strettamente crescente in $[0, 1]$. Sia quindi $H\colon U \times \mathbb{R} \to U$ data da $H(x, t) := p + \alpha(t)v$ se $E^{-1}(x) = (p, v) \in V$.

Osserviamo che banalmente H è ben definita e liscia e lasciamo al lettore la verifica del fatto che H sia effettivamente un'omotopia liscia tra $\iota \circ \rho$ e id_U. □

Abbiamo ora tutti gli strumenti per poter dare la dimostrazione del teorema di approssimazione di Whitney che enunciamo nuovamente.

Teorema 10. *Siano* N *e* M *due varietà differenziabili e sia* $F\colon N \to M$ *una applicazione continua. Allora esistono una applicazione differenziabile* $\tilde{F}\colon N \to M$ *e una omotopia* $H\colon N\times[0, 1] \to M$ *continua tra* F *e* $\tilde{F}$*. In particolare se* F *è differenziabile su un sottoinsieme chiuso* $A \subseteq N$ *allora è possibile scegliere* H *in modo che sia costante su* A*.*

Dimostrazione. Come già osservato ci possiamo ridurre al caso in cui M è una sottovarietà propria di $\mathbb{R}^n$ per qualche $n > m = \dim M$. Sia U un intorno tubolare di M (che sappiamo esistere per il *lemma 8*). Per la *definizione 7* questo significa che U è immagine diffeomorfa tramite E di un aperto $V \subset NM$ della forma $V = \{(p, v) \in NM : \quad \|v\| < \delta(p)\}$ dove $\delta\colon M \to \mathbb{R}$ è una funzione continua sempre positiva.

Poniamo $g(p) := \sup\{r \in \mathbb{R} : \quad B(p, r) \subset U\}$. In questo modo $g\colon M \to \mathbb{R}$ è chiaramente una funzione continua e sempre positiva tale che $g(p) \leq \delta(p)$. Componendo F con l'inclusione possiamo (con abuso di linguaggio) considerare $F\colon N \to \mathbb{R}^n$ funzione continua. Allora per il *lemma 3* sappiamo che esiste $\hat{F}\colon N \to \mathbb{R}^n$ differenziabile tale che $\|F(p) - \hat{F}(p)\| < g(p)$ $\forall p \in N$ e che, se F è differenziabile su un sottoinsieme chiuso $A \subseteq N$, $\hat{F}|_A = F|_A$.

Abbiamo quindi in particolare che $\hat{F}(N) \subset U$ per come abbiamo scelto g, ovvero possiamo pensare $\hat{F}\colon N \to U$ differenziabile.

Sia ora $H\colon N \times [0,1] \to M$ data da

$$H(p,t) := \rho((1-t)F(p) - t\hat{F}(p))$$

dove ρ è la retrazione liscia fornita dal *lemma 9*.

Per la funzione H valgono le proprietà seguenti:

1. H è ben definita perché $\forall p \in M$ e $\forall t \in [0,1]$ si ha che

   $$\|(1-t)F(p) - t\hat{F}(p) - F(p)\| = t\|F(p) - \hat{F}(p)\| < g(p)$$

   ovvero $(1-t)F(p) - t\hat{F}(p) \in U$

2. H è continua (tutte le funzioni che intervengono nella sua definizione sono almeno continue)

3. $H(p,0) = \rho(F(p)) = F(p)$ perché $F(p) \in M$

4. $H(p,1) = (\rho \circ \hat{F})(p)$

5. se $p \in A$ allora $H(p,t) = \rho((1-t)F(p) - t\hat{F}(p)) = \rho(F(p)) = F(p)$, cioè H è costante su A

Deduciamo che H è una omotopia continua tra la funzione F e la funzione $\tilde{F} := \rho \circ \hat{F}$, $\tilde{F}\colon N \to M$. Quest'ultima è una funzione liscia (ovvio) ed è tale che se $p \in A$ allora

$$\tilde{F}(p) = \rho(\hat{F}(p)) = \rho(F(p) = F(p)) = F(p)$$

La tesi è pertanto completamente dimostrata. $\square$