Piccioni soddisfatti e armoniche sinuose

Una serie dal carattere dubbioso

Davide Francesco Redaelli

Un celebre foglio di esercizi di Zanco (di Analisi 1, si dice) ne contiene uno che «se risolto, dà nettamente più soddisfazione dei precedenti»...

Ho deciso di riassumere il mio intervento a *Fuori Orario* del 4 maggio 2018 sotto la forma di un esercizio guidato, che reputo un buon compromesso per non scontentare troppo chi volesse avere un "ricordo" della giornata e non disincentivare eccessivamente chi volesse ancora provare a risolvere da sé questo esercizio.

Chiameremo con $\mathfrak{S}$ la serie

$$\sum_{n>0} \frac{1}{n^{1+|\sin n|}},$$

della quale il nostro scopo è determinare il carattere.

L'aspetto interessante di serie come questa è il fatto che il termine generale è del tipo n^{α_n} con $\alpha_n < -1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, sebbene non si possa affermare che $\alpha_n = -1 - \varepsilon$ per qualche $\varepsilon > 0$ fissato per ogni n. Se così fosse, infatti, la serie sarebbe banalmente convergente; invece bisogna capire con più precisione quanto il fatto che $\{|\sin n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia denso in $[0,1]$ *(perché?)* influisca sulla convergenza di tale serie. Inoltre, la mera densità non è sufficiente a concludere che la serie diverga o converga *(controesempi?)*, sebbene il procedimento che gli esercizi che propongo invitano a seguire suggerisca una condizione sufficiente per la divergenza che ha in qualche modo a che fare con un concetto di densità, se mi si passa il termine...

Esercizio 1 (Insiemi gelatinosi). Consideriamo gli insiemi $\mathcal{E}_k$ definiti per ogni $k \in \mathbb{N}$ da $\mathcal{E}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset$ e

$$\mathcal{E}_k = \left\{ n \in \mathbb{N} \cap \left(0, e^k\right) \;\middle|\; |\sin n| < 2\pi/k \right\}$$

per $k > 0$. Scrivere una minorazione per $\mathfrak{S}$ usando tali insiemi, tramite una serie $\mathcal{S}_1$ il cui termine generale dipenda da $\#\left(\mathcal{E}_k \setminus \mathcal{E}_{k-1}\right)$.

Esercizio 2 (Un telescopio fatto d'esponenziali). Dopo aver mostrato che vale

$$\#\left(\mathcal{E}_k \setminus \mathcal{E}_{k-1}\right) \geq \#\mathcal{E}_k - \#\mathcal{E}_{k-1},$$

Minorare $\mathcal{S}_1$ con una serie $\mathcal{S}_2$ che abbia un contributo telescopico. [*Suggerimento: usare le proprietà elementari dell'esponenziale.*]

Esercizio 3 (Piccioni soddisfatti). Sia $k > 1$ intero fissato. Consideriamo la partizione della circonferenza d'equazione $|z| = 1$, $z \in \mathbb{C}$, data dagli insiemi

$$\left\{ z = e^{2\pi i\vartheta} \in \mathbb{C} \;\middle|\; \vartheta \in \left[\frac{j}{k}, \frac{j+1}{k}\right) \right\}, \qquad j = 0, \dots, k-1.$$

Consideriamo altresì il sottoinsieme $\left\{ e^{in} \mid n \in \mathbb{N} \cap \left(0, e^k\right) \right\}$. Usando il principio dei cassetti, trovare una stima per difetto per $\#\mathcal{E}_k$.

Esercizio 4 (Armoniche sinuose, ma pur sempre armoniche). Usando la stima dell'esercizio precedente, minorare $\mathcal{S}_2$ e dedurre che $\mathfrak{S}$ è divergente. [*Nota: si suppone di sapere che la serie armonica diverge.*]

Grazie a tutti coloro che sono venuti ad ascoltarmi parlare di questa cosa, e anche a chi avrebbe voluto ma non ha potuto.