Imprevedibilià di spazi T4(normali)

Pranav Kasela

Def Uno spazio (X, τ) è uno spazio T4 (normale) se $\forall A, B \subset X$ chiusi disgiunti $\exists\ U, V \subset X$ aperti disgiunti tale che $A \subset U$ e $B \subset V$.

Gli spazi T4 si comportano molto male rispetto al prodotto infatti in alcuni casi neanche prodotto di due spazi T4 è T4, ad esempio il piano di Sorgenfrey[1]. Per spazi T4 a base numerabile si ha qualche speranza ad esempio $\mathbb{R}$(è a base numerabile) è T4 e si ha che $\mathbb{R}^J$ con J al più numerabile[2] è uno spazio ancora T4. Segue dal fatto che $\mathbb{R}^J$ è uno spazio metrico e tutti gli spazi metrici sono T4. Volgiamo dimostrare che se J ha la cardinalità più del numerabile allora $\mathbb{R}^J$ non è uno spazio T4[3].

Prop 1 Sia (X, τ) uno spazio T4 (normale) e $Y \subset X$ chiuso allora $(Y, \tau|_Y)$ è uno spazio T4 (normale).
Dim Siano $A, B \subset Y$ chiusi disgiunti, poichè $Y \subset X$ è chiuso allora A e B sono chiusi in X e X è T4 per ipotesi quindi siano $U, V \subset X$ aperti disgiunti contenenti A e B, $U \cap Y$ e $V \cap Y$ sono aperti in Y contente A e B. $\square$

Le seguenti proposizioni serviranno per alcune osservazioni dopo l'esempio:

Prop 2 Siano $\{(X_i, \tau)\}_{i \in I}$ spazi T2 (Hausdroff) allora $\prod_{i \in J} X_i$ è uno spazio T2 qualunque sia la cardinalità di J.
Dim Siano $\mathbf{x} = (x_i)$ e $\mathbf{y} = (y_i)$ con $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ allora $\exists \beta$ tale che $(x_\beta) \neq (y_\beta)$, X_β è T2 quindi siano $U, V \subset X_\beta$ aperti disgiunti contenenti (x_β) e (y_β) rispettivamente allora $\pi^{-1}(U)$ e $\pi^{-1}(V)$ sono due aperti disgiunti contenenti $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ rispetivamente. $\square$

Prop 3 Siano $\{(X_i, \tau)\}_{i \in I}$ spazi T3 (Regolari) allora $X = \prod_{i \in J} X_i$ è uno spazio T3 qualunque sia la cardinalità di J.
Dim T3 implica T2 quindi $\{X_i\}$ sono T2 $\forall i$ e dalla prop precendete segue che X è T2 quindi in particolare è T1. Sia $\mathbf{x} = (x_i) \in X$ e U intorno aperto di x si scelga un elemento dalla base $\prod U_i \ni \mathbf{x}$, $\forall i$ si sceglie un intorno $(x_i) \in V_i \subset X_i$ tale che $\overline{V_i} \subset U_i$ e se $U_i = X_i$ allora $V_i = X_i$ quindi $V = \prod V_i$ è un intorno di $\mathbf{x}$ e ho che $\overline{V} \subset \prod U_i \subset U$. $\square$

Teorema di metrizzazione di Urysohn: Ogni spazio T3 e a base numerabile è metrizzabile.

Prop 4 Sia I una famiglia di indici al più numerabile e siano $\{(X_i, \tau)\}_{i \in I}$ spazi a base numerabile allora $X = \prod_{i \in I} X_i$ è uno spazio a base numerabile.
Dim Sia $\mathcal{B}_i$ base di X_i, si prenda $U = \prod U_i$ tale che $U_i \in \mathcal{B}_i$ per un numero finito di indici e $U_i = X_i$ altrimenti allora U è una base numerabile di X. $\square$

[1] Si veda esempio 2 del capitolo 32 di James R. Munkres, Topology.
[2] Useremo $\mathbb{R}^J$ al posto di $\prod_{i \in J} \mathbb{R}$ per semplicità di notazione.
[3] Per chi vuole vedere il testo è l'esercizio 9 del capitolo 32 di James R. Munkres, Topology.

Vogliamo mostrare che $\mathbb{R}^J$ con J più del numerabile non è T4, in particolare prendo $J = \mathbb{R}$. Si ricorda che $\mathbb{N}$ è un sottospazio chiuso in $\mathbb{R}$ e $\overline{\prod X} =$ [4] $\prod \overline{X}$ quindi ho che $\overline{\prod \mathbb{N}} = \prod \overline{\mathbb{N}} = \prod \mathbb{N}$ cioè è chiuso in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Usando la Prop 1 ho che se $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ è T4 allora lo è anche $\mathbb{N}^{\mathbb{R}}$ quindi basterà mostrare che $\mathbb{N}^{\mathbb{R}}$ non è T4.

La dimostrazione è divisa in 4 passaggi:
i) $X = \mathbb{N}^{\mathbb{R}}$. Sia $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{x}$ si puo vedere come $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ oppure $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$, sia $B \subsetneq \mathbb{R}$ tale che B sia finito, definiamo: $U(\mathbf{x}, B) = \{\mathbf{y} \in X | x(j) = y(j) \text{ per } j \in B\}$ cioè hanno in comune un numero finito di elementi. la $U(\mathbf{x}, B)$ appena definita risulta essere una base infatti è aperto poichè $\mathbb{N}$ ha la topologia discreta e sia U aperto di X allora

$$U = \begin{cases} U_i & i \in B \\ X_i & i \notin B \end{cases}$$

chiaramente $U(\mathbf{x}, B) \subset U$ cioè $U(\mathbf{x}, B)$ è una base.
ii) Adesso definiamo dei chiusi : $\forall n \in \mathbb{N}$ fissato $P_n := \{\mathbf{x} \in X | \mathbf{x} : \mathbb{R} - \mathbf{x}^{-1}(n) \to \mathbb{N} \text{ è iniettiva}\} = \{\mathbf{x} \in X | x_j \neq n, x_k \neq n \Longrightarrow x_j \neq x_k\}$ cioè tutte le coordinate $\neq$ da n sono tutte distinte tra di loro. P_n è chiuso infatti sia $\mathbf{y} \in^c P_n \Longrightarrow \exists j, k \in \mathbb{R}$ tale che $y_j \neq n, y_k \neq n$ ma $y_k = y_j$ fissati questi j, k sia $U(\mathbf{y}, \{j, k\})$ è un intorno aperto di $\mathbf{y}$ e $U(\mathbf{y}, \{j, k\}) \subset {}^cP_n$ quindi ${}^cP_n$ è aperto. $\forall n \neq m$ ho che $P_n \cap P_m = \emptyset$ infatti sia $\mathbf{x} \in P_n \Longrightarrow$ ha al più un numero numerabili di coordinate $\neq$ da n e siccome ha un numero più del numerabile di coordinate allora $\exists$ almeno due indici tali che le coordinate siano $= n$ cioè $\mathbf{x} \notin P_m$ cioè sono disgiunti.
iii) siano U, V aperti tali che $P_1 \subset U$ e $P_2 \subset V$ e sia $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, ...\}$ una succesione in $\mathbb{R}$ tali che $\alpha_i \neq \alpha_j$ se $i \neq j$ e sia $0 = n_0 < n_1 < n_2 < ...$ una succesione in $\mathbb{N}$. $\forall i \geq 1$ definisco $B_i = \{\alpha_{n_1}, ..., \alpha_{n_i}\}$ e [5]

$$x^i = \begin{cases} x^i(\alpha_j) = j & 1 \leq j \leq n_{i-1} \\ x^i(\alpha) & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

quindi ho che $x^1 = (1, 1, 1, ..., 1, ...)$ (tutti uno) e $B_1 = \{\alpha_{n_1}\}$ quindi ho x^{n_i} è una succesione[6] in $P1$ e converge ad un punto $\mathbf{x}$ tale che $x_i = 1$ se non per un numero al più numerabile di indici. Siccome $x^{n_i} \in P1\ \forall i \in \mathbb{N} \Longrightarrow U(x^i, B_i) \subset U\ \forall i \in \mathbb{N}$
iv) Data la successione α dal punto iii) e la successione di x^i definisco analogamente un punto $y \in P2$:

$$y = \begin{cases} y(\alpha_j) = j & j \in \alpha \\ y(\alpha) = 2 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

$\Longrightarrow \exists B$ finito tale che $U(y, B) \subset V$ e poichè B è finito $\Longrightarrow \exists$ tale che $B \cap \alpha \subset B_i = \{\alpha_{n_1}, ..., \alpha_{n_i}\}$ definisco un punto z:

$$z = \begin{cases} z_j = j & j \in B_i \\ z_j = 1 & j \in B_{i+1} - B_i \\ z_j = 2 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

[4] Proprietà della chiusura in spazio prodotto.
[5] Useremo la notazione di x^i come una funzione.
[6] Si Noti che $x^{n_i} \in P1\ \forall i \in \mathbb{N}$.

$\forall j \in B$ o $j \in B_i$ e $z_j = j = y_j$ oppure $j \notin \alpha$ e $z_j = 2 = y_j$ $\forall j \in B_{i+1}$, se $j \in B_i$ e $z_j = j = x_j^{i+1}$ oppure $j \in B_{i+1} - B_i$ e $z_j = 1 = x_j^{i+1} \implies z \in U(y, B) \cap U(x^{i+1}, B_{i+1}) \subset U \cap V \implies U \cap V \neq \emptyset$ per la genericità degli aperti ho che $\nexists$ aperti disgiunti che separino P_1 e P_2, cioè lo spazio X non è uno spazio T4 $\implies$ non è neanche $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ per la Prop 1. $\square$

Oss Si ricorda che ogni spazio metrico è T4 quindi lo spazio $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ non è metrizzabile poichè non è T4. Dalla Prop 3 segue che è T3. Il Teorema di metrizzazione di Urysohn ci dice che ogni spazio T3 e a base numerabile è metrizzabile, poichè non è metrizzabile ma T3 $\implies \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ non è neanche a base numerabile, quindi è anche un controesempio per il fatto che prodotto più del numerabile di spazi a base numerabile può non essere a base numerabile.

Oss Si noti che nella dimostazione non abbiamo usato il fatto che $J = \mathbb{R}$ (spazio di indici) se non per il fatto che fosse non numerabile infatti questa dimostazione funziona $\forall J$ non numerabile, ad esempio $\mathbb{R}^{\mathbb{C}^n}$, con un cambio di notazione.