– Riflettiamo sulla Γ: una proprietà della funzione di Eulero –

Ricordiamo che:

(1) $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x > 0$ (in realtà $x \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} x > 0$)

(2) $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ (3) $\Gamma(1) = 1 \quad \rightsquigarrow \quad \Gamma(n) = (n-1)! \quad \forall n \geq 1 \; n \in \mathbb{N}$

- Osserviamo che usando la (2) nella forma $\Gamma(x-1) = \dfrac{\Gamma(x)}{x-1}$ è possibile estendere la funzione Γ all'insieme $D := \mathbb{R} \setminus \{ n \in \mathbb{Z},\ n \leq 0 \}$

$\to$ Es. $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -\frac{2}{3}\sqrt{\pi}$

(in realtà a $\mathbb{C} \setminus \{ n \in \mathbb{Z} : n \leq 0 \}$)

Teorema: $\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi x)} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (formula di Riflessione per la Γ di Eulero)

– **Oss** In realtà l'asserto vale per $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ e la dimostrazione "classica" usa strumenti dell'analisi complessa che noi non padroneggiamo. Diamo dunque una dimostrazione nel caso "reale".

– **N.B.** Assumeremo la validità della seguente uguaglianza ("dimostrata" dallo stesso Eulero): $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$\boxed{\text{Passo 1}}$ $\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \int_0^1 \dfrac{t^{x-1} + t^{-x}}{t+1}\, dt$ se $x \in (0,1)$

Dim $\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \int_0^{+\infty} s^{x-1} e^{-s}\, ds \cdot \int_0^{+\infty} t^{-x} e^{-t}\, dt = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} s^{x-1} t^{-x} e^{-(s+t)}\, ds\, dt$

Poniamo ora $s(a,b) = \dfrac{ab}{b+1}$ e $t(a,b) = \dfrac{a}{b+1}$ $\quad (\Rightarrow s+t = a \; ; \; s/t = b)$

$(s,t) \in (0,+\infty) \times (0,+\infty) \rightsquigarrow (a,b) \in (0,+\infty) \times (0,+\infty)$

$$J = \begin{pmatrix} \partial_a s & \partial_b s \\ \partial_a t & \partial_b t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{b+1} & \frac{a}{(b+1)^2} \\ \frac{1}{b+1} & -\frac{a}{(b+1)^2} \end{pmatrix} \Rightarrow |\det J| = \frac{a}{(b+1)^2} \neq 0$$

$\Rightarrow$ (cambio di variabili) $\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \dfrac{(ab)^{x-1} \cdot a^{-x}}{(b+1)^{-1}} \cdot \dfrac{a}{(b+1)^2}\, e^{-a}\, da\, db =$

$= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \dfrac{b^{x-1}}{b+1} \cdot e^{-a}\, da\, db = \int_0^{+\infty} e^{-a}\, da \cdot \int_0^{+\infty} \dfrac{b^{x-1}}{b+1}\, db = \int_0^{+\infty} \dfrac{b^{x-1}}{b+1}\, db = \int_0^{+\infty} \dfrac{t^{x-1}}{t+1}\, dt$

$\to$ uso massiccio del th. di Tonelli / Fubini

$\underline{\text{Oss}}$ Perché basta mostrare il th con $x \in (0,1)$?

Se $y = x+n$ $n \in \mathbb{N}$ t.c. $x \in (0,1)$ allora:

$$\Gamma(x+n) = \Gamma(x+n-1)(x+n-1) = \Gamma(x+n-2)(x+n-1)(x+n-2) =$$

$$= \Gamma(x) \cdot \underbrace{(x)(x+1) \dots (x+n-1)}_{n \text{ fattori}} \quad \text{(usando la (2))}$$

$$\Gamma(1-(x+n)) = \frac{\Gamma(1-x-n+1)}{(1-x-n)} = \frac{\Gamma(1-x-n+2)}{(1-x-n)(1-x-n+1)} =$$

$$= \frac{\Gamma(1-x)}{\underbrace{(-x)\cdot(-1-x) \dots (1-x-n)}}$$

$$\Longrightarrow \Gamma(y) \cdot \Gamma(1-y) = \Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) \cdot (-1)^n \overset{\text{TH}}{=}$$

$$= \frac{\pi}{\sin(\pi x)} (-1)^n = \frac{\pi}{\sin(\pi(y-n))} (-1)^n = \frac{\cancel{(-1)^n}}{\cancel{(-1)^n}} \cdot \frac{\pi}{\sin(\pi y)}$$

(Analogamente si ragiona se $y < 0$ ...)

FONDAZIONE ISTUD

sostituzione $s = 1/t$

Ora: $$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{t+1}\,dt = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{t+1}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{t+1}\,dt = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{t+1} + \int_0^1 \frac{s^{-x}}{s+1}\,ds =$$

$$= \int_0^1 \frac{t^{x-1} + t^{-x}}{t+1}\,dt \qquad \blacksquare$$

$s = 1/t \to t = 1/s \to dt = -\frac{1}{s^2}ds$; $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{t+1}\,dt = \int_1^0 \frac{s^{1-x}}{1/s+1}\left(-\frac{1}{s^2}\right)\cdot ds =$

$$= \int_0^1 \frac{s^{1-x}\cdot s}{s+1}\,ds = \int_0^1 \frac{s^{-x}}{s+1}\,ds$$

$\boxed{\text{Passo 2}}$ $$\int_0^1 \frac{t^{x-1}+t^{-x}}{t+1}\,dt = \lim_{N\to+\infty} \sum_{-N}^{N}{}' \frac{(-1)^n}{x+n} =: \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \frac{(-1)^n}{x+n} \quad (x\in(0,1))$$

Dim

Osserviamo che $\displaystyle\frac{1}{t+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}{}'(-1)^n t^n$ se $t\in[0,1)$. Quindi vale che:

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}+t^{-x}}{t+1}\,dt = \int_0^1 t^{x-1}\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}{}'(-1)^n t^n\right)dt + \int_0^1 t^{-x}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}{}'(-1)^n t^n\,dt =$$

$$= \int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty}{}'(-1)^n\cdot t^{n+x-1}\right)dt + \int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty}{}'(-1)^n\cdot t^{n-x}\right)dt =$$

TCD - corollario per le serie

NB $n+x-1 > -1$ $\forall x\in(0,1)$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}{}'(-1)^n\int_0^1 t^{n+x-1}\,dt + \sum_{n=0}^{+\infty}{}'(-1)^n\int_0^1 t^{n-x}\,dt =$$

(convergenti per criterio Leibniz)

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}{}'(-1)^n\cdot\left(\frac{1}{n+x}\right) + \sum_{n=0}^{+\infty}{}'(-1)^n\frac{1}{n+1-x} =$$

somma dei limiti = limite somma se tutto è finito

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}{}'(-1)^n\frac{1}{n+x} + \sum_{n=1}^{+\infty}{}'(-1)^n\frac{1}{x-n} = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}{}'(-1)^n\frac{1}{n+x} + \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=-N}^{-1}{}'\frac{(-1)^n}{x+n} =$$

$$= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}{}'(-1)^n\frac{1}{n+x} + \sum_{n=-N}^{-1}{}'\frac{(-1)^n}{x+n} = \lim_{N\to+\infty}\sum_{-N}^{N}{}'\frac{(-1)^n}{x+n} = \sum_{-\infty}^{\infty}{}'\frac{(-1)^n}{x+n} \qquad \blacksquare$$

Oss $\boxed{\text{Passo 1}} + \boxed{\text{Passo 2}} \implies \Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x) = \displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'\frac{(-1)^n}{x+n}$ $\quad x\in(0,1)$

Il $\boxed{\text{Passo 3}}$ consisterà quindi nel provare che $\forall x\in(0,1)$ (in realtà $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$) vale che $\displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'\frac{(-1)^n}{x+n} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$

Passo 3 $\quad \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \frac{(-1)^n}{n+x} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \quad \forall x \in (0,1)$ (in realtà $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$)

Dim. Introduciamo la seguente funzione: $g(x) = \frac{\pi}{\tan(\pi x)} - \lim_{N\to+\infty} \sum_{-N}^{N}{}' \frac{1}{n+x}$

Osserviamo che g è definita per $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Noi ci ~~centre~~ concentreremo sul caso $x \in (0,1)$. Infatti è immediato verificare che:

$\boxed{(i)}$ $g(x+1) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$

Infatti $\tan(\pi(x+1)) = \tan(\pi x)$ e $\lim_{N\to+\infty} \sum_{-N}^{N}{}' \frac{1}{n+x} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{-N+1}^{N+1}{}' \frac{1}{n+x} =$

$= \lim_{N\to+\infty} \sum_{-N}^{N}{}' \frac{1}{n+x+1}$

Osserviamo inoltre che: $\sum_{-N}^{N}{}' \frac{1}{n+x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+x} + \frac{1}{x-n} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{N} \frac{2x}{x^2-n^2}$

Quindi possiamo riscrivere la g come $g(x) = \frac{\pi}{\tan(\pi x)} - \left(\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2-n^2}\right)$ $\boxed{(\circ)}$

Mostriamo ora che se $g(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ allora $g \in C(\mathbb{R})$. In particolare grazie alla (i) basta mostrare che $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$

Per $x \to 0$ vale che $\tan(\pi x) = \pi x + \frac{\pi^3 x^3}{3} + o(x^4)$.

Osserviamo che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2-n^2}$ converge uniformemente su tutti i compatti contenuti in $[0,1)$

quindi per continuità $\lim_{x\to 0} \sum_{1}^{+\infty}{}' \frac{2x}{x^2-n^2} = 0$

Quindi per $x \to 0$ vale che $g(x) = \frac{\pi}{\pi x + \frac{\pi^3 x^3}{3} + o(x^4)} - \frac{1}{x} + o(1) =$

$= \frac{\cancel{\pi x} - \cancel{\pi x} + \frac{\pi^3 x^3}{3} + o(x^4)}{\pi x^2 + o(x^2)} + o(1) = o(1) \Rightarrow \lim_{x\to 0} g(x) = 0$ $\boxed{(ii)}$

Verifichiamo ora che $g(x/2) - g\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{2\pi}{\sin(\pi x)} - 2\sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \frac{(-1)^n}{n+x}$ $\boxed{(iii)}$

$g(x/2) - g\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\pi}{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)} - \frac{\pi}{\tan\left(\frac{\pi(x+1)}{2}\right)} - \lim_{N\to+\infty} \sum_{-N}^{N}{}' \frac{1}{n+x/2} + \lim_{N\to+\infty} \sum_{-N}^{N} \frac{1}{n+\frac{x+1}{2}} =$

$= \frac{\pi\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)} - \frac{\pi\cos\left(\frac{\pi(x+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(x+1)}{2}\right)} - 2\left(\lim_{N\to+\infty} \sum_{-N}^{N}{}' \frac{1}{2n+1} - \lim_{N\to+\infty} \sum_{-N}^{N} \frac{1}{2n+x+1}\right) =$

$$= \frac{\pi\left[\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} - 2\lim_{N\to+\infty}\sum_{-2N}^{2N+1}\frac{(-1)^n}{n+x} =$$

$$= \frac{2\pi}{\sin(\pi x)} - 2\lim_{N\to+\infty}\sum_{-N}^{N}\frac{(-1)^n}{n+x} = \frac{2\pi}{\sin(\pi x)} - 2\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'\frac{(-1)^n}{n+x}$$

Osserviamo ora che se riusciamo a mostrare che $g\equiv 0$ la dimostrazione è conclusa. In particolare abbiamo già visto che $g|_{\mathbb{Z}} = 0 = g(0)$, quindi per concludere è sufficiente mostrare che g è costante, ovvero che $g'\equiv 0$

Mostriamo che $g'(x) = \frac{-\pi^2}{\sin^2(\pi x)} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'\frac{1}{(n+x)^2}$ (per $x\in(0,1)$) $\boxed{(iv)}$

Per il termine $\frac{-\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$ basta derivare $\frac{\pi}{\tan(\pi x)}$; ci occupiamo della serie, ovvero di mostrare che $\frac{d}{dx}\left(-\lim_{N\to+\infty}\sum_{-N}^{N}{}'\frac{1}{n+x}\right) = \lim_{N\to+\infty}\sum_{-N}^{N}\frac{1}{(n+x)^2}$ per $x\in(0,1)$

Recuperiamo la scrittura (°) e possiamo quindi scrivere:

$$\frac{d}{dx}\left(-\lim_{N\to+\infty}\sum_{-N}^{N}{}'\frac{1}{n+x}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x}-\sum_{1}^{+\infty}{}'\frac{2x}{x^2-n^2}\right) = \frac{1}{x^2} - \frac{d}{dx}\left(\sum_{1}^{+\infty}{}'\frac{2x}{x^2-n^2}\right)$$

Ora: $\frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{x^2-n^2}\right) = -2\frac{(n^2+x^2)}{(n^2-x^2)^2}$ e $\sum_{1}^{+\infty}{}'\frac{n^2+x^2}{(n^2-x^2)^2}$ converge uniformemente su tutti i compatti contenuti in $(0,1)$

Oss $\left|\frac{n^2+x^2}{(x^2-n^2)^2}\right| \leq \frac{n^2+1}{(n^2-1+\varepsilon)^2} \sim \frac{1}{n^2}$ e applicando il criterio di Weierstrass si conclude

$\Longrightarrow$ (convergenza uniforme e derivazione per serie) $-\frac{d}{dx}\left(\sum_{1}^{+\infty}\frac{2x}{x^2-n^2}\right) = 2\sum_{1}^{+\infty}{}'\frac{n^2+x^2}{(n^2-x^2)^2} =$

$$= \lim_{N\to+\infty}\sum_{1}^{N}{}'\frac{1}{(x+n)^2}+\frac{1}{(x-n)^2} = \lim_{N\to+\infty}\sum_{\substack{-N\\ n\neq 0}}^{N}{}'\frac{1}{(x+n)^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{x^2} - \frac{d}{dx}\sum_{1}^{+\infty}{}'\frac{2x}{x^2-n^2} = \lim_{N\to+\infty}\sum_{-N}^{N}{}'\frac{1}{(x+n)^2} = \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x+n)^2}$$

Osserviamo ora che dalla (i) ricaviamo immediatamente che $g'(x+1) = g'(x)$ $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$

Procediamo ora a mostrare la validità delle seguenti:

$\boxed{(v)}$ $\lim_{x\to 0} g'(x) = 0$; $\boxed{(vi)}$ $g'\left(\frac{x}{2}\right) + g'\left(\frac{x+1}{2}\right) = 4g'(x) \quad x \in (0,1)$

Osserviamo che se tali uguaglianze sono vere allora:

- è possibile prolungare con continuità g' su $\mathbb{R}$ ponendo $g'(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.
- se $M = \max_{x\in[0,1]} |g'(x)|$ (Weierstrass) $\Rightarrow \exists\, \hat{x} \in [0,1]$ tale che $g'(\hat{x}) = M \geq 0$

$\Rightarrow$ (dalla (vi)) $M = |g'(\hat{x})| = \frac{1}{4}\left|g'\left(\frac{\hat{x}}{2}\right) + g'\left(\frac{\hat{x}+1}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{4}(M+M) = M/2$

$\Rightarrow M \leq M/2 \Rightarrow M = 0 \Rightarrow g'|_{[0,1]} \equiv 0 \Rightarrow$ (dalla oss. prec. $\to$ (i))

vale che $g' \equiv 0$ su $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $g \equiv 0$ su $\mathbb{R}$ $\to$ fine della dim.

Dimostriamo la (v): per $x \to 0$ $\sin(\pi x) = \pi x - \frac{\pi^3 x^3}{6} + o(x^4)$

inoltre per continuità $\sum_1^{+\infty} \frac{n^2+x^2}{(x^2-n^2)^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (continuità in $(0,1)$ dalla dalla conv. unif.)

Quindi per $x \to 0$ abbiamo:

$$g'(x) = \frac{-\pi^2}{\left(\pi x - \frac{\pi^3 x^3}{6} + o(x^4)\right)^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{\pi^2}{3} + o(1) =$$

$$= \frac{-\cancel{\pi^2 x^2} + \cancel{\pi^2 x^2} - \frac{1}{3}\pi^4 x^4 + o(x^5)}{\pi^2 x^4 + o(x^4)} + \frac{\pi^2}{3} + o(1) = \cancel{-\frac{\pi^2}{3}} + \cancel{\frac{\pi^2}{3}} + o(1) \longrightarrow 0$$

Quindi $\lim_{x\to 0} g'(x) = 0$

Infine mostriamo la (vi):

$$g'\left(\frac{x}{2}\right) + g'\left(\frac{x+1}{2}\right) = -\pi^2\left(\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)} + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi(x+1)}{2}\right)}\right) + \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n+x/2)^2} + \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(n+\frac{x+1}{2}\right)^2} =$$

$$= -\frac{\pi^2}{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)} + \frac{\pi^2}{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)} + 4\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2n+x)^2} + \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1+x)^2}\right) =$$

$$= \frac{-\pi^2}{\left[\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]^2} + 4\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} = +4\left(-\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} + \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}\right) = 4\cdot g'(x)$$

■

Bibliografia:

[1] G.E. Andrews, R. Askey, R. Roy, "Special functions", Cambridge University Press, 1999

(in particolare il capitolo 1; la dimostrazione proposta è la risoluzione dell'esercizio 15 a pag. 49)