Tolgo un punto 'a pera' (Cit.)

Francesco Viganò

18 Aprile 2017

"Determinare il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^2$ meno un punto." Intraprendendo la risoluzione dell'esercizio attraverso retrazioni e omotopie non ci si chiede se la domanda è ben posta: *la risposta è indipendente dalla scelta del punto perduto?* Tutti converranno che finchè si tratta di un piano non vi è molto da dire, ma nella totale generalità del discorso si è costretti a dover passare alla distinzione dei casi. Esiste però una classe di insiemi per cui è lecito sorvolare sul problema.
Ringrazio Christian per avermi indirizzato e corretto. Cominciamo da un paio di preliminari.

Osservazione. Per ogni $n \geq 1$, esiste un omeomorfismo $\mu\colon D^n \to D^n$ che modella il disco chiuso n-dimensionale spostando l'origine in $(1/2, 0, ...)$ e fissandone il bordo (i.e. $\mu_{|\partial D^n} \equiv id_{|\partial D^n}$). Un esempio (forse brutto) può essere dato dalla funzione

$$\mu_1(x) = \begin{cases} \sqrt{1-\Sigma}\dfrac{2x_1 + \sqrt{1-\Sigma}}{x_1 + 2\sqrt{1-\Sigma}} & \text{se } x_i \neq 1 \ \forall i = 2, ..., n \\ 0 & \text{se qualche } x_i = 1 \end{cases}$$

$$\mu_i(x) = x_i \ \forall i = 2, ..., n$$

dove $\Sigma = \sum_{i=2}^n x_i^2$.

Proposizione 1. Sia X uno spazio topologico connesso e $\sim$ una relazione di equivalenza su X. Se ogni classe di equivalenza è aperta allora il quoziente $X/\sim$ è un singleton.

Dimostrazione. Sia $[x]$ una classe di equivalenza. Si ha che ${}^c[x] = \bigcup_{y \notin [x]} [y]$ è aperto e dunque $[x]$ è chiuso. Essendo $[x]$ un claperto non vuoto ($x \in [x]$) e X connesso per ipotesi, $[x] = X$.

□

Proposizione 2. (Colla per omeomorfismi). Siano $A, B \subseteq X$ due chiusi e siano $g\colon A \to A, h\colon B \to B$ due omeomorfismi di A e B tali per cui $g_{|A\cap B} \equiv h_{|A\cap B} \equiv id_{A\cap B}$. Allora la mappa $f\colon A \cup B \to A \cup B$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in A \\ h(x) & \text{se } x \in B \end{cases}$$

è un omeomorfismo di $A \cup B$.

Dimostrazione. L'applicazione è ovviamente ben posta in quanto g e h non differiscono sull'intersezione. Dalla suriettività di g e h discende quella di f; dalla loro iniettività e dalla richiesta di coincidenza con $id_{A\cap B}$ delle loro restrizioni deriva quella di f. Sia $C \cap (A \cup B)$ un chiuso di $A \cup B$; allora $f(C\cap(A\cup B)) = f((C\cap A)\cup(C\cap B)) = f(C\cap A)\cup f(C\cap B) = g(C\cap A)\cup h(C\cap B)$ è chiuso e quindi chiusa è la funzione f. Infine la continuità di f deriva dal Lemma di Incollamento (quello vero).

□

Giungiamo quindi al cuore di queste pagine.

Teorema. *Sia X una varietà topologica connessa. Allora per ogni coppia di punti $x, y \in X, \exists g \in \mathrm{Omeo}(X)$ tale per cui $g(x) = y$.*

Dimostrazione. Definiamo su X la relazione $\sim$: $x \sim y \iff \exists g \in \mathrm{Omeo}(X)$ tale che $g(x) = y$. $\sim$ è ovviamente un'equivalenza; consideriamone dunque una classe e un suo rappresentante $x \in [x]$. Poichè X è localmente euclideo esiste una carta (U, φ) tale che $x \in U \in \tau$ e $\varphi \colon U \to \mathbb{R}^n$ è un omeomorfismo. Ci basta provare che $U \subseteq [x]$ per dedurre che $[x]$ è aperto e concludere per la Proposizione 1. Sia quindi $y \in U$; a meno di una traslazione, una dilatazione e una rotazione (tutti omeomorfismi di $\mathbb{R}^n$), possiamo supporre che φ porti x nell'origine e y in $(1/2, 0, ...)$. Siano $D := D^n$, $E := \varphi^{-1}(D^\circ)$ e $F := \varphi^{-1}(D)$. Definiamo dunque $g \colon X \to X$ come

$$g(t) = \begin{cases} t & \text{se } t \in X \setminus E \\ (\varphi^{-1} \circ \mu \circ \varphi)(t) & \text{se } t \in F \end{cases}$$

dove μ è la funzione esempio dell'osservazione iniziale. L'applicazione appena definita è ben posta: infatti, se $t \in (X \setminus E) \cap F = F \setminus E$ allora $\varphi(t) \in \partial D$ e dunque $\varphi^{-1}(\mu(\varphi(t))) = t$ poichè μ fissa il bordo di D. Inoltre, $g(x) = y$. Ora, E (controimmagine di D° mediante la funzione continua φ) è aperto in U, che è a sua volta aperto in X; dunque E è aperto anche in X e quindi $X \setminus E$ è chiuso. L'applicazione φ^{-1} è continua, quindi F è compatto poichè lo è D; *ma X è* T2 *in quanto varietà topologica*, dunque F è chiuso essendo un compatto in un T2 e la tesi segue applicando la Proposizione 2.

□

Corollario. (della Pera). *Se X è una varietà topologica connessa allora rimuovere un punto è una mossa indipendente dalla scelta del punto.*

Un'ultima nota per concludere: entrambe le richieste della definizione di varietà topologica (essere localmente euclidea e avere la proprietà di Hausdorff) sono necessarie.

Controesempio. *Localmente euclideo è necessario.* Consideriamo il *bouquet di due circonferenze.* Questo spazio topologico non è localmente euclideo; infatti, detto P il punto di giuntura, esiste un sistema fondamentale di intorni di P costituito da aperti connessi con la proprietà che, per ciascuno di essi, rimuovendo P si ottiene uno spazio costituito da 4 componenti connesse, e ciò impedisce la possibilità di un omeomorfismo di un intorno di tale punto con un aperto connesso di $\mathbb{R}$. Inoltre, il bouquet non soddisfa la tesi sopra: non esiste alcun omeomorfismo che porti il punto di giuntura in un altro punto. Rimuovendoli, infatti, nel primo caso lo spazio viene separato in due componenti, mentre nel secondo viene mantenuta la connessione.

Controesempio. T2 *è necessario.* Consideriamo la *retta con doppia origine*, ossia l'insieme $X = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \{0^+, 0^-\}$ con la topologia indotta dalla base costituita dagli aperti di $\mathbb{R}$ che non contengono 0 e dagli insiemi del tipo $(\ (-1/n, 1/n) \setminus \{0\}\ ) \cup \{0^+\}$ e analoghi per 0^-, al variare di $n \in \mathbb{N}$. Questo spazio topologico è localmente euclideo ma non è T2. Vale il seguente fatto: non esiste un omeomorfismo della retta con doppia origine che porti 1 in 0^+. Infatti $X \setminus \{1\}$ si sconnette mentre $X \setminus \{0^+\}$ no (è omeomorfo a $\mathbb{R}$). Un'altra dimostrazione che sfrutta più direttamente il fatto che X non sia T2 è per assurdo; supponiamo che tale omeomorfismo g esista e sia x la preimmagine di 0^-. Sia nel caso esotico che in quello regolare, indipendentemente dal valore assunto da x, quest'ultima può essere separata da 1; esistono quindi due aperti U_x, U_1 tali che $x \in U_x, 1 \in U_1$ e $U_x \cap U_1 = \emptyset$. Poichè g è un omeomorfismo, si ha $g(U_x) \cap g(U_1) = \emptyset$ con $0^- = g(x) \in g(U_x)$ e $0^+ = g(1) \in g(U_1)$, assurdo in quanto 0^+ e 0^- non si separano. Quest'ultimo argomento è comodo per una generalizzazione a $\mathbb{R}^n$ *con doppia origine.*